Problemas de Variable Compleja I

Curso 2010-2011

Hoja 6

En los siguientes problemas denotaremos por Δ *al disco unidad y por* $\mathbf{H}$ *al semiplano superior, es decir,*

$$\Delta = \{z \in \mathbf{C} \,:\, |z| < 1\} \qquad y \qquad \mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} \,:\; \operatorname{Im} z > 0\}$$

1. Describir la imagen mediante $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ de los siguientes conjuntos:

(i) $\mathbf{R}$ (ii) $\{z \in \mathbf{C} : |z| < 2\}$ (iii) Δ (iv) $\{iy : y \in \mathbf{R}\}$

2. Hallar una transformación de Möbius T tal que $T(i) = -i$, $T(0) = 0$, $T(-1) = \infty$.

3. Hallar una transformación de Möbius T tal que $T(\Delta) = \mathbf{H}$ y $T(0) = 3 + 2i$.

4. Hallar dos transformación de Möbius T_1 y T_2 tales que $T_i(\Delta) = \Delta$ para $i = 1, 2$, y además verifiquen:

$$T_1(1/2) = 1/3, \qquad T_2(i) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \qquad T_2(-i) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

5. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(i) Para todo $\alpha \in \mathbf{R}$ y $a \in \mathbf{C}$ con $|a| < 1$, la transformación de Möbius

$$T(z) = e^{i\alpha}\,\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

envía Δ en Δ.

(ii) Toda aplicación holomorfa y biyectiva de Δ en Δ que fija el origen es una rotación.

Sugerencia: Usar el lema de Schwarz.

(iii) Toda aplicación holomorfa y biyectiva f de Δ en Δ es una de las aplicaciones descritas en (i).

Sugerencia: Componer f con una transformación de Möbius S apropiada y aplicar (ii) a $S \circ f$.

6. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(i) Para todos $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ tales que $ad - bc > 0$, la transformación de Möbius

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

envía $\mathbf{H}$ en $\mathbf{H}$.

(ii) Toda aplicación holomorfa y biyectiva f de $\mathbf{H}$ en $\mathbf{H}$ es una de las aplicaciones descritas en (i).

Sugerencia: Usar el problema anterior.

7. Encontrar una aplicación holomorfa y biyectiva de Ω_1 en Ω_2 en los siguientes casos:

(i) $\Omega_1 = \{z \in \mathbf{C} : |z-1| < \sqrt{2}\,,\, |z+1| < \sqrt{2}\}$ y $\Omega_2 = \mathbf{H}$.

(ii) $\Omega_1 = \{z \in \mathbf{C} :\ \operatorname{Re} z < 0\,,\, |\operatorname{Im} z| < 1\}$ y $\Omega_2 = \{z \in \mathbf{C} : |\operatorname{Im} z| < 1\}$.

(iii) $\Omega_1 = \{z \in \mathbf{C} : |\operatorname{Re} z| < 1\}$ y $\Omega_2 = \{z \in \mathbf{C} :\ \operatorname{Re} z > 0,\, |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}$.

(iv) $\Omega_1 = \mathbf{H}$ y $\Omega_2 = \{z \in \mathbf{C} : |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2},\, |z + \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}$.

(v) $\Omega_1 = \Delta \setminus \{x \in \mathbf{R} : -1 \leq x \leq 0\}$ y $\Omega_2 = \Delta$.

(vi) $\Omega_1 = \mathbf{H} \setminus \{z \in \mathbf{C} :\ \operatorname{Re} z = 0,\, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$ y $\Omega_2 = \Delta$.

(vii) $\Omega_1 = \{z \in \mathbf{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ y $\Omega_2 = \mathbf{C} \setminus \{iy : y \leq 0\}$.

8. Dadas dos circunferencias C_1 y C_2 con C_2 interior y tangente a C_1 (por ejemplo $C_1 = \{z \in \mathbf{C} : |z-2| = 2\}$ y $C_2 = \{z \in \mathbf{C} : |z-1| = 1\}$) demostrar que se pueden colocar un número infinito de circunferencias C_n en la región comprendida entre C_2 y C_1 de tal manera que cada uno de ellas es tangente a C_1, C_2 y al siguiente.

Sugerencia: Mediante una transformación de Möbius apropiada, transformar la región entre C_1 y C_2 en una región para la cual la solución sea sencilla.

9. Verificar que $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ es una aplicación holomorfa y biyectiva de Δ en $\mathbf{C} \setminus \Omega$ donde Ω es el conjunto $\{z \in \mathbf{C} :\ \operatorname{Re} z \leq -1/4,\ \operatorname{Im} z = 0\}$.

Sugerencia: $k(z) = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right)$.

10. Dar una transformación de Möbius T tal que $T(\{z \in \mathbf{C} :\ \operatorname{Re} z > 0,\, |z-1| > 1/2\})$ es de la forma $\{w \in \mathbf{C} : 1 < |w| < h\}$ calculando exactamente h.

11. Hallar una transformación holomorfa y biyectiva del complemento en $\hat{\mathbf{C}}$ del arco $\{e^{i\theta}\,,\, 0 < \theta < \pi\}$ sobre el complemento en $\hat{\mathbf{C}}$ de $\overline{\Delta} = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$.

12. Sea Ω el abierto $\Omega = \{z \in \mathbf{C} : \, |z-5| > 4\,, |z+5| > 4\}$. Encontrar una transformación de Möbius que lleve Ω sobre el conjunto $\{w \in \mathbf{C} \,:\, 1 < |w| < R\}$ para algún R, determinando exactamente R.

13. Describir la imagen de $\Omega = \mathbf{C} \setminus \{z \in \mathbf{C} \,:\, \text{ Re } z \leq 0\,,\ \text{Im } z = 0\}$ mediante la transformación $f(z) = \text{Log}\left(\sqrt{z+1}\right)$.

14. Sea Describir la imagen mediante $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ de los siguientes conjuntos:

(i) Δ (ii) $\{z \in \mathbf{C} : \ R < |z| < 1, \} \cap \mathbf{H}$ (iii) $\Delta \setminus \{x \in \mathbf{R} : \ a \leq x < 1\}\,,$ con $a < 0$.

15. Describir la imagen de $\{z = re^{i\theta} : 0 < \theta < \frac{\pi}{3}\}$ mediante la transformación $f(z) = z^3 + \dfrac{1}{z^3}$.

16. Calcular el número de raices de la ecuación

$$11z^4 - 20z^3 + 6z^2 + 20z - 1 = 0$$

en $\{z \in \mathbf{C} : \ \text{Re } z > 0\}$

17. Calcular el número de raices de la ecuación

$$17z^4 + 26z^3 + 56z^2 + 38z + 7 = 0$$

en $\{z \in \mathbf{C} : \ \text{Re } z > 0, \ , \ \text{Im } z > 0\}$

18. Sea $f : \Delta \longrightarrow \overline{\Delta}$ una función holomorfa no constante. Probar que:

(i) $\dfrac{|f(0)| - |z|}{1 + |f(0)||z|} \leq |f(z)| \leq \dfrac{|f(0)| + |z|}{1 - |f(0)||z|}$

(ii) $|f'(a)| \leq \dfrac{1 - |f(a)|^2}{1 - |a|^2}$

Sugerencia: Considerar las funciones $g_a : \Delta \longrightarrow \Delta$ con $a \in \Delta$ definidas por

$$g_a(z) = \frac{f(z) - a}{1 - \overline{a} f(z)}$$

y usar el Lema de Schwarz.

19. Sea f una función holomorfa en Δ tal que $\operatorname{Re} f(z) > 0$ para todo $z \in \Delta$ y además $f(0) = 1$.

(i) Usando una transformación de Möbius y el lemma de Schwarz, probar que

$$|f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}, \quad \text{para cada} \quad z \in \Delta\,.$$

(ii) Probar también que

$$|f(z)| \geq \frac{1-|z|}{1+|z|}, \quad \text{para cada} \quad z \in \Delta\,.$$

20. Supongamos que f una función holomorfa en el semiplano superior $\mathbf{H}$ y tal que toma valores en $\mathbf{H}$, $(f(\mathbf{H}) \subset \mathbf{H})$. Probar que si $z, w \in \mathbf{H}$ entonces

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{f(z)-\overline{f(w)}}\right| \leq \left|\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right|$$

21. Supongamos que f es una aplicación conforme del disco unidad Δ en el cuadrado $\Omega = \{z : |\operatorname{Re} z| < 1, |\operatorname{Im} z| < 1\}$ y que satisface $f(0) = 0$. Probar que f satisface la siguiente relación de simetría:

$$f(i\,z) = i\,f(z), \text{ para cada } z \in \Delta\,.$$

Probar también que si el desarrollo de f en serie de potencias alrededor de 0 es $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ entonces $c_n = 0$ para todo n tal que $n-1$ no sea múltiplo de 4.

22. Sea Ω un dominio simplemente conexo del plano complejo, $\Omega \neq \mathbf{C}$, y sea f una aplicación conforme del disco unidad Δ sobre Ω. Sea ahora g una función holomorfa en Δ con valores en Ω y tal que $g(0) = f(0)$. Probar que

$$\max_{|z|\leq r} \{|g(z)|\} \leq \max_{|z|\leq r} \{|f(z)|\}$$

para cada r, $0 \leq r < 1$.

Sugerencia: Considerar la función $f^{-1} \circ g$.

23. Sea f una función holomorfa en un dominio Ω simplemente conexo, $\Omega \neq \mathbf{C}$, y con valores en ese mismo dominio. Supongamos que en Ω hay dos puntos a, b, $a \neq b$ tales que $f(a) = a$ y $f(b) = b$. Probar que entonces f es la función identidad.