Problemas de Variable Compleja I

CURSO 2010-2011

HOJA 5

1. Hallar los desarrollos de Laurent de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

(i) $\dfrac{1}{z^2-3z+2}$, $z_0=0$ (ii) $\operatorname{sen}\dfrac{1}{z}$, $z_0=0$ (iii) $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$, $z_0=i$

(iv) $e^{1/(1-z)}$, $z_0=1$ (v) $z^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{z-1}$, $z_0=1$ (vi) $\operatorname{sen}\dfrac{z}{z-1}$, $z_0=1$.

2. Hallar las singularidades y los correspondientes residuos de las siguientes funciones:

(i) $\operatorname{sen}\dfrac{1}{z}$ (ii) $\dfrac{1}{z^3-3}$ (iii) $\dfrac{1}{z^2+2z+1}$ (iv) $\dfrac{1}{z^2\operatorname{sen} z}$ (v) $\dfrac{z^2-1}{\cos(\pi z)+1}$ (vi) e^{1/z^2}.

3. Calcular las integrales

(i) $\displaystyle\int_{|z|=t}\frac{dz}{z^2+z+1}$ con $t\neq 1$ (ii) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{1+z}{1-\cos z}dz$ (iii) $\displaystyle\int_{|z|=8}\tan z dz$.

4. Sean f y g dos funciones holomorfas en $B(z_0,r)$. Demostrar que si f tiene un cero de orden n en z_0 y g tiene un cero de orden m en z_0, con $n<m$, entonces f/g tiene un polo de orden $m-n$ en z_0. Calcular el residuo.

5. Sean f y g dos funciones holomorfas en $B(z_0,r)$. Demostrar:

(i) Si z_0 es un cero de f de orden n, entonces

$$\operatorname{Res}\left(\frac{gf'}{f}\,;z_0\right)=g(z_0)\,n$$

(ii) Si γ es un camino simple cerrado en $B(z_0,r)$ orientado en sentido positivo y Ω denota la región limitada por γ, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\sum_{j=1}^{n} g(z_j)$$

donde z_j son los ceros de f contenidos en Ω repetidos según su multiplicidad.

6. Demostrar que el polinomio $p(z)=z^8+z^3+z+1$ tiene exactamente 2 raices en el primer cuadrante.

7. ¿ En qué cuadrantes se hallan los ceros de la ecuación

$$z^4+z^3+4z^2+2z+3=0\,?$$

8. Demostrar:

(i) $$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{a + \operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2+a}}, \qquad a > 0.$$

(ii) $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos^2\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{6}}.$$

(iii) $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{2\pi}{ab}, \qquad a, b > 0.$$

(iv) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = \pi.$$

(v) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{ab(a+b)}, \qquad a, b > 0.$$

(vi) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\,dx = \frac{\pi(1+ab)e^{-ab}}{2b^3}, \qquad a \geq 0, \quad b > 0.$$

(vii) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{4x^2-1}\,dx = -\frac{\pi}{2}.$$

(viii) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\pi x \cos \pi x}{2x^2-x}\,dx = -\pi.$$

(ix) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2+b^2)}\,dx = \frac{\pi}{2b^2}(1-e^{-b}), \qquad b \geq 0.$$

(x) $$\int_0^{\infty} \frac{x^a}{(x+b)^2}\,dx = \frac{\pi a b^{a-1}}{\operatorname{sen}\pi a}, \qquad |a| < 1, \quad b > 0.$$

(xi) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ay}}{1+be^{-y}}\,dy = \frac{-\pi b^a}{\operatorname{sen}\pi a}, \qquad -1 < a < 0, \quad b > 0.$$

(xii) $$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}(\cos\frac{\pi p}{2})^{-1}, \qquad -1 < p < 1\,.$$

(xiii) $$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x^2+b^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4b^3}(\log b - 1), \qquad b > 0.$$

(xiv) $$\int_0^{\infty} \frac{x^a \log x}{x+b}\,dx = \frac{\pi b^a}{\operatorname{sen}^2\pi a}(\pi\cos\pi a - \log b \operatorname{sen}\pi a), \qquad -1 < a < 0, \quad b > 0.$$