Problemas de Variable Compleja I

Curso 2010-2011

Hoja 4

1. Sea Ω una región en el plano complejo, $z : [a, b] \to \Omega$ una curva diferenciable, $g : \Omega \to \mathbf{C}$ una función holomorfa y $w(t) = g(z(t))$.

(i) Demostrar que la curva $w(t)$ es diferenciable y $w'(t) = g'(z(t))z'(t)$ (multiplicación compleja).

(ii) Demostrar que si g es solamente diferenciable, entonces

$$w'(t) = \frac{\partial g}{\partial z}(z(t))z'(t) + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z(t))\overline{z'(t)}.$$

2. Calcular $\int_\gamma |z|\bar{z}dz$, donde γ es el camino cerrado compuesto por la semicircunferencia superior de $|z| = 1$ y el segmento $-1 \leq x \leq 1$; $y = 0$, con orientación positiva.

3. Demostrar que si $|a| < R$, entonces

$$\int_{|z|=R} \frac{|dz|}{|z-a||z+a|} < \frac{2\pi R}{R^2 - |a|^2}.$$

4. Sea γ el cuadrado en $\mathbf{C}$ con vértices $\pm 1 \pm i$. Acotar el valor absoluto de las siguientes integrales:

$$\text{(i)} \int_{|z|=1} \frac{dz}{2+z^2}, \qquad \text{(ii)} \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}dz \qquad \text{(iii)} \int_\gamma (\operatorname{sen} z)^2 dz$$

5. Sea γ el arco del círculo $|z| = 2$ comprendido en el primer cuadrante. Verificar que

$$\left| \int_\gamma \frac{dz}{z^2+1} \right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

6. Sea γ el círculo unidad orientado positivamente. Calcular:

$$\text{(i)} \int_\gamma z \operatorname{sen} z^2 dz \quad \text{(ii)} \int_\gamma \frac{\cos z}{z}dz \quad \text{(iii)} \int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z^2}dz \quad \text{(iv)} \int_\gamma \frac{e^z}{z}dz \quad \text{(v)} \int_\gamma \frac{2}{1-4z^2}dz\,.$$

7. Sea $P(z)$ un polinomio y sea γ el círculo $\{z \in \mathbf{C} : |z| = R\}$ orientado positivamente. Probar que:

$$\int_\gamma \overline{P(z)}dz = 2\pi i R^2 \overline{P'(0)}.$$

8. Sea γ un camino simple y cerrado que encierra un área S. Demostrar que

$$S = \frac{1}{2i}\int_\gamma x dz - \frac{1}{2}\int_\gamma y dz = \frac{1}{2i}\int_\gamma \bar{z} dz.$$

9. Calcular las integrales:

$$\text{(i)} \int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z^2-2i} \qquad\qquad \text{(ii)} \int_{|z|=1} \frac{ze^z dz}{(z-a)^3}\ ,\ |a| \neq 1.$$

10. Calcular:

$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{2n} d\theta.$$

¿Cuál es el límite $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\int_0^{2\pi}(\cos\theta)^{2n}d\theta$?

<u>Sugerencia:</u> Calcular la integral de línea $\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{dz}{z}$ usando el desarrollo binomial.

11. (i) Hallar todas las funciones enteras que satisfacen

$$f(2z) = 2f(z),\ \text{para todo } z \in \mathbf{C}$$

(ii) Hallar todas las funciones holomorfas en $\mathbf{D}$ que satisfacen

(*) $$f(z^2) = f(z) + z,\ \text{y } f(0) = 0$$

Comprobar que no existe ninguna función entera que satisfaga (*).

12. Demostrar que no hay ninguna función f holomorfa en $\mathbf{D}$, tal que

$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} = f\left(-\frac{1}{n}\right)$ para $n = 2, 3, 4\ldots.$

13. Demostrar que si f es holomorfa en $\mathbf{D}$ y

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{2^n} \qquad \text{para} \quad n \geq 2,$$

entonces f es idénticamente cero.

<u>Sugerencia:</u> Como $f(0) = 0$, entonces $f(z) = z^k g(z)$ con $g(z)$ holomorfa en $\mathbf{D}$ y $g(0) \neq 0$. Ver que ésto es imposible.

14. Sea Ω un dominio en $\mathbf{C}$ y sea f una función holomorfa en Ω tal que para un cierto $M > 0$, se tiene $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \Omega$. Probar que

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{\text{distancia}(z, \partial\Omega)}$$

donde $\partial\Omega$ denota la frontera de Ω.

<u>Sugerencia:</u> Sea $r < \text{distancia}(z, \partial\Omega)$. Usar la fórmula integral de Cauchy en $B(z, r)$.

15. Demostrar que si f es holomorfa en $|z| < 1$ y $|f(z)| \leq 1 - |z|$, entonces $f \equiv 0$. ¿Puede una función holomorfa satisfacer $|f(z)| \geq 1/(1 - |z|)$ para $|z| < 1$?

16. Sea f holomorfa en un abierto que contiene al disco $\{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| \leq r\}$. Demostrar:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt$$

17. Probar que si una función entera f satisface para todo $z \in \mathbf{C}$ que

$$\begin{aligned} f(z+1) &= f(z) \\ f(z+i) &= f(z) \end{aligned}$$

entonces f es una función constante.

<u>Sugerencia</u>: Usar el teorema de Liouville.

18. Demostrar que si f es holomorfa en $\mathbf{C}$ y si $|f(z)| \geq 1$, para todo $z \in \mathbf{C}$, entonces f es constante. Análogamente, si para algún $a \in \mathbf{C}$ y $r > 0$ se tiene $|f(z) - a| \geq r$, para todo $z \in \mathbf{C}$, entonces f es constante. Concluir que si f es holomorfa en $\mathbf{C}$ y no constante, entonces, $f(\mathbf{C})$ es denso en $\mathbf{C}$.

<u>Sugerencia</u>: Considerar $g(z) = \frac{1}{f(z) - a}$ y aplicar el teorema de Liouville.

19. Sea Ω un dominio acotado en $\mathbf{C}$ y f, g funciones holomorfas en Ω y continuas en $\overline{\Omega}$. Demostrar:

(i) Si $|f(z)| = |g(z)|$ en $\partial\Omega$ y $f(z).g(z) \neq 0$ en $\overline{\Omega}$, entonces $f(z) = cg(z)$ con $|c| = 1$.

(ii) Si Re f = Re g en $\partial\Omega$, entonces $f = g + i\alpha$ con $\alpha \in \mathbf{R}$.

20. Calcular las siguientes integrales trigonométricas usando la integración sobre la circunferencia unidad y la fórmula integral de Cauchy:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos t}\, dt\,, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)}{5 - 4 \operatorname{sen} t} dt\,.$$

21. Sea f una función holomorfa en $\{z \in \mathbf{C} : |z| \leq R_0\}$. Demostrar:

(i) Si γ es la circunferencia $\{z \in \mathbf{C} : |z| = R\}$ con $R < R_0$ y $|w| < R$, entonces

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{R^2 - |w|^2}{(z - w)(R^2 - z\overline{w})} f(z)dz$$

(ii) Si $0 \leq r < R < R_0$, entonces

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \psi) + r^2} f(Re^{i\psi})d\psi$$

22. Demostrar que las *integrales de Fresnel*:

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx\,, \qquad \int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2)\,dx$$

ambas tienen valor $\sqrt{2\pi}/4$, integrando la función e^{iz^2} sobre el contorno γ compuesto por el segmento $[0,R]$, el arco circular desde R hasta $Re^{\pi i/4}$ y el segmento desde $Re^{\pi i/4}$ hasta el origen y utilizando el teorema de Cauchy.
Sugerencia: Para acotar la integral sobre el arco, es conveniente usar la *desigualdad de Jordan* vista en Cálculo I: $\operatorname{sen} t \geq (2t)/\pi$, para $0 \leq t \leq \pi/2$. ¿Cuál es la interpretación geométrica de esa desigualdad? (Observar la gráfica de la función seno.)

23. Hallar el número de ceros del polinomio

$$p(z) = z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$$

en el anillo $\{z \in \mathbf{C} : 1 < |z| < 2\}$.

24. ¿Cuántos ceros tiene en el disco $|z| < 1$ la ecuación

$$e^z - 4z^n + 1 = 0\,?$$

25. ¿ Cuántos ceros tiene en el círculo $|z| < R$ la ecuación $e^z = az^n$ con $|a| > e^R/R^n$?

26. Probar que la ecuación $z = \lambda - e^{-z}$, con λ real y $\lambda > 1$, tiene en $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ una única raiz y, además, ésta es real.