Problemas de Variable Compleja I

Curso 2010-2011

Hoja 3

1. *Teorema del binomio para exponentes reales:* Sea α un número real con $\alpha \notin \mathbf{N}$ y sea

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \binom{\alpha}{1} = \alpha, \binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!} \text{ si } j > 1$$

(i) Demostrar que el radio de convergencia de la serie $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$ es 1.

(ii) Comprobar que $(1+z)F'(z) = \alpha F(z)$.

(iii) Concluir que $F(z) = (1+z)^\alpha$, es decir, $\quad (1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k \quad$ si $|z| < 1$.
(Aquí se toma la rama principal de w^α.)

2. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, donde los c_n son los números de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, \ldots$, definidos mediante $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ para $n = 2, 3, \ldots$ y $c_0 = c_1 = 1$.

(i) Demostrar que $f(z)(1 - z - z^2) = 1$ para z en el disco de convergencia de la serie.

(ii) Obtener una fórmula para los c_n's desarrollando $1/(1 - z - z^2)$ en fracciones simples.

(iii) Encontrar la fórmula para los números d_n definidos por $d_n = \alpha d_{n-1} + \beta d_{n-2}$ para $n \geq 2$ y con $d_0 = d_1 = 1$.

3. (i) Calcular:

$$e^{i\frac{\pi}{4}}, \qquad e^{5\frac{\pi i}{4}}, \qquad e^{-7\frac{\pi i}{3}}, \qquad \exp\left[\pi\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4\right], \qquad \cos(2+3i), \qquad \operatorname{sen}(1+i)$$

(ii) Tomando la rama principal del logaritmo calcular:

$$(1+i)^i, \qquad 2^{-1-i}, \qquad i^{\sqrt{3}}$$

(iii) Calcular todos los posibles valores de:

$$i^i, \ \log i, \ (1+i)^{1+i}, \ \operatorname{arcsen}\sqrt{i}, \ 2^{\pi i}, \ \operatorname{Im}(z^z) \quad \text{si } z = x + iy, \text{ con } x, y \in \mathbf{R}.$$

4. Resolver las ecuaciones: (i) $\cos z = 4$ (ii) $\operatorname{sen} z = \frac{3}{4} + \frac{i}{4}$

5. Demostrar que: (i) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$ (ii) $\cos 2z = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z$

6. Encontrar el máximo de $|\cos z|$ en el cuadrado $\{z : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2\pi, \quad 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\pi\}$.

7. Se considera la función $z \longmapsto \operatorname{sen} z$.

(i) Demostrar que transforma rectas paralelas al eje real en elipses y rectas paralelas al eje imaginario en hipérbolas.

(ii) ¿Son las elipses disjuntas entre sí?¿Y las hipérbolas? Demostrar que las elipses son perpendiculares a las hipérbolas.

(iii) Demostrar que dicha función es uno-uno en la región $\left\{z \in \mathbf{C} : 0 < \mathrm{Re} z < \frac{\pi}{2}, 0 < \mathrm{Im} z\right\}$ y que la imagen de esta región es el primer cuadrante. ¿Cuál es la imagen de la franja $-\frac{\pi}{2} <$Re$z < \frac{\pi}{2}$?

8. Escribir explícitamente la función cuya serie de potencias es $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!}$. ¿Cuánto vale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n)!}$?

<u>Sugerencia:</u> Evaluar la función exponencial en los puntos $\pm z$ y $\pm iz$.

9. ¿En qué curva se transforma la recta $\{z \in \mathbf{C} : z = (1+i)t, \, t \in \mathbf{R}\}$ mediante la aplicación exponencial $f(z) = e^z$?

10. ¿Para qué valores $z \in \mathbf{C}$ se cumple que $\overline{e^{iz}} = e^{i\bar{z}}$?

11. Denotemos por $\{\arg z\}$ el conjunto de todos los valores posibles de arg z, por $\{\log z\}$ el conjunto de todos los valores posibles de $\log z$ y por $\left\{z^b\right\}$ el conjunto de todos los valores posibles de z^b. Con el significado evidente $\{\log z\} = \log|z| + i\,\{\arg z\}\,, \left\{z^b\right\} = e^{b\{\log z\}}$. Comprobar que:

(i) $\{\log(zw)\} = \{\log z\} + \{\log w\}$ (aquí $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$)

(ii) $\left\{(zw)^b\right\} = \left\{z^b\right\} \cdot \left\{w^b\right\}$ (aquí $A \cdot B = \{ab : a \in A, b \in B\}$)

(iii) $\{\log(z^\alpha)\} = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (\alpha\{\log z\} + 2k\pi i)$

(iv) $\{\arctan z\} = \frac{i}{2}\{\log \frac{i+z}{i-z}\}$, donde $\{\arctan z\} = \{w \in \mathbf{C} \,:\, \tan w = z\}$.

12. *Resolución trigonométrica de la ecuación cúbica:* Se considera la ecuación cúbica $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbf{C}$.

(i) Aplicar un cambio de variable $z = w + h$ para obtener una ecuación equivalente de la forma $w^3 + \beta w + \gamma = 0$.

(ii) Hacer ahora un cambio $w = gu$ que nos dé una ecuación de la forma $4u^3 - 3u + \delta = 0$.

(iii) Sea $v \in \mathbf{C}$ tal que $\sin(3v) = \delta$. Demostrar que $\alpha = \sin v$ es raíz de la ecuación que aparece en (ii).

(iv) Aplicar este procedimiento a la ecuación $z^3 + 3z^2 - 1 = 0$.

13. Demostrar que existe un único polinomio P_n de grado n tal que

$$z^n + \frac{1}{z^n} = P_n\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Sugerencia: Puede hacerse por inducción. El caso $n = 1$ es obvio. Conviene escribir $z^n + \frac{1}{z^n} - (z + \frac{1}{z})^n$ y usar que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ con la hipótesis de inducción.

14. Sean $\omega_1, \dots, \omega_n$ las n raíces n-ésimas de la unidad, es decir $\omega_j = e^{2\pi i(j/n)}$, $j = 1, \dots, n$.

(i) Probar que si m es un número natural

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\omega_j)^m = \begin{cases} 0, & \text{si } m \text{ no es múltiplo de } n \\ 1, & \text{si } m \text{ es múltiplo de } n \end{cases}$$

(ii) Probar que si $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots$ es un polinomio cualquiera cuyo grado es, a lo sumo, $2n - 1$ entonces

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} P(\omega_j) = a_0 + a_n.$$

(iii) ¿Cuánto vale $\sum\limits_{m=0}^{n} \binom{n}{3m}$?. Recordar que $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.

Sugerencia: Utilizar la fórmula $(1 + z)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k$.

15. (i) Demostrar que un polinomio de la forma

$$z^n - p_1 z^{n-1} - p_2 z^{n-2} - \cdots - p_{n-1} z - p_n$$

donde $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \cdots, p_n \geq 0, p_1 + \cdots + p_n > 0$, tiene solamente un cero positivo.

Sugerencia: La función $\dfrac{p_1}{x} + \cdots + \dfrac{p_n}{x^n}$ es decreciente para $0 < x < \infty$.

(ii) Demostrar que si z_0 es un cero de $z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ entonces $|z_0| \leq \alpha$ donde α es el único cero positivo de $z^n - |a_1|\, z^{n-1} - \cdots - |a_{n-1}|\, z - |a_n|$ (excluimos el caso trivial en que todos los a_i son 0).

(iii) Supongamos que $a_n \neq 0$. Entoces el valor absoluto de todos los ceros de $z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ es mayor o igual que el único cero positivo de $z^n + |a_1|\, z^{n-1} + \cdots + |a_{n-1}|\, z - |a_n|$.

Sugerencia: Buscar un polinomio al que aplicar (ii).

16. (i) Si $p_0 > p_1 > \cdots > p_n > 0$ entonces el polinomio $P(z) = p_0 + p_1 z + \cdots + p_n z^n$ no se anula nunca en $|z| < 1$.

Sugerencia: Es más fácil demostrarlo para $(1 - z)P(z)$ para el que se tiene que $|(1 - z)P(z)| \geq p_0 - \big((p_0 - p_1)|z| + (p_1 - p_2)|z|^2 + \cdots + p_n|z|^{n+1}\big)$.

(ii) Supongamos que todos los coeficientes del polinomio $p_0 + p_1 z + \cdots + p_n z^n$ son positivos. Demostrar que sus ceros están en el anillo $\alpha \leq |z| \leq \beta$ donde

$$\alpha = \min\left\{\frac{p_0}{p_1}, \frac{p_1}{p_2}, \cdots, \frac{p_{n-1}}{p_n}\right\}, \beta = \max\left\{\frac{p_0}{p_1}, \frac{p_1}{p_2}, \cdots, \frac{p_{n-1}}{p_n}\right\}$$

Sugerencia: Usar (i) con z sustituido por $\dfrac{z}{\rho}$ o por $\dfrac{\rho}{z}$ con ρ apropiado.

17. (i) Si $z_1, \ldots, z_n$ son números complejos entonces el polígono convexo más pequeño que los contiene (posiblemente degenerado) viene dado por

$$\{z = m_1 z_1 + \cdots + m_n z_n : m_1, m_2, \ldots, m_n \geq 0 \text{ y } m_1 + \cdots + m_n = 1\}$$

(ii) Demostrar que el polígono del apartado anterior es la intersección de todos los semiplanos que contienen a $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

(iii) La derivada $P'(z)$ de $P(z)$ no puede tener ceros fuera del polígono convexo más pequeño que contiene a las raíces de $P(z)$. (Este resultado es conocido como el *teorema de Gauss-Lucas.*)

Sugerencia: Escribir $P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$ y considerar $\dfrac{P'(z)}{P(z)}$ para expresar los ceros de $P'(z)$ en la forma $m_1 z_1 + \cdots + m_n z_n$ o usar el apartado (ii).