Problemas de Variable Compleja I

Curso 2010-2011

Hoja 2

1. *Esfera de Riemann.* Se considera $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ y se definen los entornos de ∞ como aquellos que contienen un conjunto de la forma $\{z \in \mathbf{C} : |z| > R\}$ para algún $R > 0$.
Con estos entornos $z_n \to \infty$ quiere decir que:

Para todo $R > 0$ existe N tal que $|z_n| > R$ para todo $n > N$.

Igualmente, $\lim_{z\to\infty} f(z) = a$ quiere decir:

Para todo $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que para todo z con $|z| > R$ se tiene $|f(z) - a| < \epsilon$.

De manera similar se definen $\lim_{z\to b} f(z) = \infty$ y $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

Sea $\mathbf{S} = \left\{p \in R^3 : p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1\right\}$ y consideremos la proyección estereográfica:

$$\pi : \mathbf{S} \to \hat{\mathbf{C}},\ \pi(p) = \begin{cases} \dfrac{(p_1 + ip_2)}{1 - p_3} & \text{si } p \neq \mathbf{N} = (0,0,1) \\ \infty & \text{si } p = \mathbf{N} \end{cases}$$

(i) Comprobar que $\pi^{-1}(z) = \left(\dfrac{2\text{Re } z}{|z|^2 + 1}, \dfrac{2\text{Im } z}{|z|^2 + 1}, \dfrac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right)$.

(ii) Dados z y w en el plano complejo hallar la distancia entre los correspondientes puntos en la esfera de Riemann. Estudiar también el caso $w = \infty$. Comprobar que esta distancia tiende a cero cuando z tiende a w.

(iii) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{z^n}{n} = \infty$ si $|z| > 1$.

2. Halle en la esfera de Riemann $\mathbf{S}$ las imágenes de los conjuntos definidos por las desigualdades:

(i) $\text{Im } z > 0$; (ii) $\text{Im } z < 0$; (iii) $\text{Re } z > 0$;

(iv) $\text{Re } z < 0$; (v) $|z| < 1$; (vi) $|z| > 1$.

3. ¿ Qué corresponde en la esfera de Riemann a la familia de rectas paralelas del plano?

4. Demuestre que mediante la proyección estereográfica las circunferencias sobre la esfera se transforman en circunferencias o rectas del plano. ¿Cuáles son las circunferencias sobre la esfera que se transforman en rectas ?

5. Demostrar las siguientes afirmaciones.

(i) Si $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ y $Q(z) = b_m z^m + \cdots + b_0$ son polinomios con $a_n \neq 0 \neq b_m$, entonces se tiene

$$\lim_{z\to\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ \infty & \text{si } n > m \end{cases}$$

(ii) No existe $\lim_{z\to\infty} e^z$.

6. Hállense los puntos de continuidad de las funciones

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^4-1}{z-i} & \text{si } z \neq i \\ 4i & \text{si } z = i, \end{cases}$$

$$g(z) = \begin{cases} z & \text{si } |z| \leq 1 \\ |z|^2 & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$$

7. ¿Dónde son holomorfas las siguientes funciones?

(i) $f(x,y) = x^2 - y^2 + ixy$.

(ii) $f(z) = g(\overline{z})$, donde g es holomorfa en Ω.

(iii) $f(z) = \overline{g(z)}$, donde g es holomorfa en Ω.

(iv) $f(z) = \overline{g(\overline{z})}$, donde g es holomorfa en Ω.

(v) $f(z) = |g(z)|$, donde g es holomorfa en Ω.

8. ¿Donde son holomorfas las siguientes funciones ?¿Cuál es su derivada?

(i) $z + \dfrac{1}{z}$, $\quad \dfrac{1}{(z+1/z)^2}$, $\quad \dfrac{1}{(z-1)(z^2-2)}$, $\quad \dfrac{z}{z^n-2}$ (n entero positivo).

(ii) e^{e^z}, $\quad \operatorname{sen}(e^z)$, $\quad \cos\overline{z}$, $\quad e^{z+1/z}$, $\quad \dfrac{e^z}{z^2+2}$, $\quad \dfrac{1}{e^z-1}$.

(iii) $\log(e^z+1)$, $\quad \sqrt{e^z+1}$, $\quad \sqrt{z^3-1}$, $\quad \operatorname{sen}\sqrt{z}$, $\quad z^{2z}$.

Nota: En (iii) hay que elegir una rama.

9. ¿Cual es la imagen del círculo unidad $\{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ mediante la aplicación $f(z) = z + (1/z)$? ¿Y las de los círculos $\{z \in \mathbf{C} : |z| = R\}$, $R > 1$?

10. Determinar la imagen de cada una de las rectas $x = y$, $x = -y$ por la función e^{z^2}.

11. Sea $T : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (u(x, y)\,,\, v(x, y)).$$

Definimos la derivada de T en la dirección $\vec{w} = (a, b)$ como

$$D_{\vec{w}}T = \lim_{t \to 0} \frac{T(x + ta, y + tb) - T(x, y)}{t}.$$

Observar que

$$D_{\vec{w}}T = (D_{\vec{w}}u, D_{\vec{w}}v).$$

Dada la función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, demostrar que si f es holomorfa, entonces

$$D_{\vec{w}}f = f'(z)w \quad \text{donde} \quad w = a + ib.$$

12. Sea f una función holomorfa en un dominio $\Omega \subset \mathbf{C}$. Demostrar que si $|f|$ es constante en Ω, entonces f es constante.

13. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(i) Si h es una función de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ y f es holomorfa, entonces

$$\Delta(h \circ f) = (\Delta h \circ f)|f'|^2.$$

(ii) Si f es holomorfa en un dominio $\Omega \subset \mathbf{C}$ y $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$, entonces

$$\Delta(|f|) = \frac{|f'|^2}{|f|}.$$

(iii) Si f, g son holomorfas en un dominio Ω, y si $|f| + |g|$ es constante en Ω y f y g no se anulan en Ω, entonces f y g son constantes.

14. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 z^n$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n^2} z^n$, $\quad \sum_{n=0}^{\infty} cos(in) z^n$.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} (n + a^n) z^n$, $\quad \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$, $\quad \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$, $\quad \sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^{1+2+\cdots+n}$.

15. Los radios de convergencia de las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ and $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ son iguales a r_1 y r_2 respectivamente. ¿ Qué se puede decir respecto a los radios de convergencia de las series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n, \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} z^n \,?$$

16. Probar que para todo $z \in \mathbf{C}$ tal que $|z| < 1$, se verifican las identidades:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{1}{1-z}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1}.$$

17. Desarrollar las siguientes funciones en potencias de la función que se indica:

(i) $\dfrac{z}{z^2 - 5z + 6}$ y $\dfrac{z}{(z-1)^2}$ en potencias de z

(ii) $\dfrac{2z+3}{z+1}$ y $\dfrac{2z+3}{(z+1)^2}$ en potencias de $z - 1$

18. (i) Calcular el radio de convergencia de las series:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{e^n}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{1+2^n}$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! \dfrac{z^n}{n^n}$

(ii) Calcular el radio de convergencia y la suma de las series:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n}}{n!}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n(n-1)z^n$, y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(z-2\pi i)^n}{n!}$.

19. ¿Para que valores de $z \in \mathbf{C}$ converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n$? ¿y $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nz}$?

20. Si $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, ¿qué es $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 a_n z^n$ en términos de f?

21. ¿Para que valores de z convergen las siguientes series ?

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{sen(nz)}{n^2}$ (ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{sen(nz)}{2^n}$ (iii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$

22. Comprobar que la serie $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^z}$ converge si Re$z > 1$.

23. Supongamos que la serie de potencias $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ tiene radio de convergencia $R = 1$ y que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0$. Denotemos

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad \text{y} \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

(i) Demostrar que

$$s_n(z) = (1-z) \sum_{k=0}^{n-1} s_k z^k + s_n z^n$$

y concluir que

$$f(z) = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$$

(ii) Demostrar que $f(z) \to 0$ cuando z se aproxima a 1 de tal forma que

$$|1-z|/(1-|z|)$$

está acotado.

24. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(i) Si $z \in \mathbf{D}$ y $k \in \mathbf{N}$, entonces $1-|z|^k \leq k(1-|z|)$.

(ii) Si $\{a_n\}$ es una sucesión de números complejos tal que $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sup_{k\geq n} \{|a_k|\} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n} k|a_k| = 0\,.$$

25. Sea f holomorfa en el disco unidad $\mathbf{D}$, con desarrollo de Taylor alrededor del origen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Denotemos por s_n la suma parcial $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

(i) Probar que si $z \in \mathbf{D}$, entonces

$$|f(z) - s_n| \leq \sum_{k=0}^{n} \{|a_k||1-z^k|\} + \{\sup_{k\geq n} |a_k|\} \frac{1}{1-|z|}\,.$$

(ii) Deducir que si $z_n = 1 - \frac{1}{n}$, entonces

$$|f(z_n) - s_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \{|a_k| k\} + n\{\sup_{k\geq n} |a_k|\}$$

(iii) Concluir finalmente que si $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ y si el límite

$$\lim_{\substack{x\in[0,1)\\ x\to 1^-}} f(x)$$

existe y vale, digamos, S, entonces

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

<u>Sugerencia</u>: Usar el ejercicio anterior.