Problemas de Variable Compleja I

Curso 2010-2011

Hoja 1

1. Realizar las operaciones indicadas:

(i) $\dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{1+i}$; (ii) $\dfrac{2}{(1-3i)^2}$; (iii) $(\sqrt{-i})^{1/3}$; (iv) $(1+i\sqrt{3})^3$.

2. Calcular:

(i) $(-\sqrt{2} - i\sqrt{2})^{1/3}$;

(ii) $\sqrt{1 - i\sqrt{3}}$;

(iii) $(1+i)^n + (1-i)^n$.

3. Resolver las ecuaciones:

(i) $(z+1)^4 + i = 0$;

(ii) $\text{Re }(z^2+5) = 0$;

(iii) $\text{Re }(z+5) = \text{Im }(z-i)$.

4. Determinar:

(i) La ecuación de la parábola con foco i y directriz $\text{Im } z = -1$.

(ii) La ecuación de la elipse con focos ± 1 que pasa por i.

(iii) La ecuación de la hipérbola con focos ± 1 que pasa por $1+i$.

5. Describir el conjunto del plano complejo determinado por las siguientes relaciones:

(i) $|z-2| - |z+2| > 3$.

(ii) $\text{Re } z + \text{Im } z < 1$.

(iii) $|2z| > |1+z^2|$.

6. Demostrar las siguientes desigualdades partiendo de consideraciones geométricas

(i) $\left|\dfrac{z}{|z|} - 1\right| \leq |\text{Arg } z|$; (ii) $|z-1| \leq ||z|-1| + |z||\text{Arg } z|$.

7. Demostrar que:

(i) Si $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ y $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, entonces los puntos z_1, z_2 y z_3 son los vértices de un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia unidad.

(ii) Si $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ y $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$, entonces los puntos z_1, z_2, z_3 y z_4 son los vértices de un rectángulo o coinciden de dos en dos.

8. ¿ Cuando tres puntos z_1, z_2, z_3, distintos dos a dos, estarán sobre una misma recta ?

9. Demostrar:

(i) Si $|z| = 1$, entonces para todos $a, b, \in C$

$$\left|\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right| = 1.$$

(ii) Si $|a| < 1$, entonces $|z| < 1$ es equivalente a

$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| < 1.$$

10. (i) Demostrar que las soluciones en $\mathbf{C}$ de la ecuación $az^2 + bz + c = 0$, con $a \neq 0$, son

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(ii) Calcular $\sqrt{(\sqrt{i})^5}$ y $\sqrt{1+\sqrt{i}}$.

11. Sea $z = x + iy \in \mathbf{C}$. Demostrar que $|x| + |y| \leq \sqrt{2}|z|$, y que sólo hay igualdad si $|x| = |y|$.
Sugerencia: Si $a, b \in \mathbf{R}$, entonces $2ab \leq a^2 + b^2$ (con igualdad sólo si $a = b$).

12. Demostrar:

(i) Si $z \neq 1$ entonces $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$.

(ii) Si $\omega \neq 1$ es una raíz n-ésima de la unidad entonces

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^n = 0,$$

y

$$1 + 2\omega + 3\omega^2 + \cdots + n\omega^{n-1} = \frac{n}{\omega - 1}.$$

(iii) Si sen$\frac{\theta}{2} \neq 0$, entonces

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right) \qquad \text{y}$$

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)\sin(\frac{n}{2}\theta)}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

Sugerencia: Usar (i) con $z = e^{i\theta}$.

13. (i) Demostrar que si w es una solución de $z^n = \mu$ (con $\mu \in \mathbf{C}$ fijo), entonces todas las soluciones son $w\omega_0, w\omega_1, w\omega_2, \ldots, w\omega_{n-1},$ donde $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$, son las raíces n-ésimas de la unidad.

(ii) Encontrar las soluciones de $z^6 - 8 = 0$.

14. Dado un número c, consideramos la sucesión z_n definida por la siguiente relación de recurrencia:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad z_0 = 0$$

(i) Probar que si $|c| > 2$, entonces $z_n \to \infty$.
Sugerencia: Verificar por inducción que si definimos $r = |c| - 1$, entonces $|z_n| \geq |c| r^{n-1}$ para $n \geq 1$.

(ii) Probar que si, para algún k, $|z_k| > 2$, entonces $z_n \to \infty$.

Nota: El conjunto de Mandelbrot $\mathcal{M}$ es el conjunto de los $c \in \mathbf{C}$ para los que la correspondiente sucesión z_n no tiende a ∞. La parte (i) demuestra que $\mathcal{M} \subset \mathbf{D}(0, 2)$.

15. Dibujar el conjunto de puntos $z \in \mathbf{C}$ que satisfacen

(i) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z}{1+i}\right) = 0$ (ii) $\left|z^2 - 2z + 1\right| = 1$ (iii) $\left|z^2 - 2z - 1\right| = 1$

16. Encontrar el máximo de $|z^{10} + a|$ cuando z es cualquier número complejo tal que $|z| \leq 1$.

17. Dar el supremo y el ínfimo del siguiente conjunto de números reales:

$$\left\{\mathrm{Re}\ (iz^3 + 1) : \ |z| < 2\right\}.$$

18. Describir geométricamente el conjunto de los puntos $w \in \mathbf{C}$ que se escriben $w = iz^2 + 1$, para $z = x + iy$ con $x > 0$, $y > 0$, $x^2 + y^2 < 1$.

19. (i) Comprobar que la ecuación $\mathrm{Re}(az + b) = 0$, con $a, b \in \mathbf{C}$ define una recta en el plano.

(ii) Encontrar a, b para que la recta pase por los puntos $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$.

(iii) Demostrar que $\mathrm{Re}(az + b) = 0$ y $\mathrm{Re}(cz + d) = 0$ son perpendiculares si y sólo si $\mathrm{Re}(a\overline{c}) = 0$.

20. Demostrar que, dados $a, c \in \mathbf{C}$, la condición necesaria y suficiente para que exista $z \in \mathbf{C}$ que verifique $|z+a| + |z-a| = 2|c|$ es que sea $|a| \leq |c|$.
Sugerencia: Si $\lambda > 0$, el conjunto $\{z \in \mathbf{C} : |z+a| + |z-a| = 2\lambda\}$ es una elipse si $\lambda > |a|$, un segmento si $\lambda = |a|$ y el conjunto vacío si $\lambda < |a|$.

21. (i) Si $z = x + iy \in \mathbf{C}$, sea $\alpha(z)$ el vector de tres dimensiones $(x, y, 0)$. Verificar que para cada $z, w \in \mathbf{C}$, se cumple $\alpha(z) \cdot \alpha(w) = \mathrm{Re}\,(z\bar{w})$ y $\alpha(z) \times \alpha(w) = (0, 0, \mathrm{Im}\,(\bar{z}w))$.

(ii) Si $0, z, w$ son los vértices de un triángulo T, ver que $\mathrm{Area}(T) = \frac{1}{2}|\mathrm{Im}\,(z\bar{w})|$.

(iii) Si $z_1, z_2, \ldots z_n$ son los vértices de un polígono P que contiene a 0 en su interior, demostrar que $\mathrm{Area}(P) = \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\,\left(\sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_{j+1}\right)\right|$, donde se toma $z_{n+1} = z_1$.

22. Sean z_1, z_2, z_3 y w_1, w_2, w_3 dos ternas de números complejos distintos. Sean T y S los triángulos cuyos vértices son, en ése orden, z_1, z_2, z_3 y w_1, w_2, w_3 respectivamente. Probar que T y S son semejantes si y sólo si

$$\frac{z_1 - z_2}{w_1 - w_2} = \frac{z_2 - z_3}{w_2 - w_3} = \frac{z_3 - z_1}{w_3 - w_1}.$$

y que esta condición puede escribirse también del siguiente modo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

23. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que $\{z_1, z_2, z_3\}$ sean los vértices de un triángulo equilátero es que

$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2.$$

Sugerencia: Considerar el triángulo $\{z_2, z_3, z_1\}$.