Hoja 7

1.- Hallar la ecuación del plano tangente a las superficies parametrizadas:

(a) $\Phi(u,v) = (4\,u, 3\,u^2 + v, v^2 + 5)$ en $(0,1,6)$.

(b) $\Phi(u,v) = (u^2, e^{v^2}, v^2 + 1)$ en $(0,1,1)$.

(c) $\Phi(u,\theta) = (\cosh u\, \cos\theta, \cosh u\, \operatorname{sen}\theta, \operatorname{senh} u)$ en $(0,1,0)$.

(d) $\Phi(u,v) = (u^2 + 1, v^2 + 1, u^2 + v^2)$ en $\Phi(1,1)$.

2.- Hallar la expresión de la normal unitaria a las superficies parametrizadas:

(a) $\Phi(u,v) = (\cos u\, \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u\, \operatorname{sen} v, \cos v)$ con $0 \le u \le 2\,\pi$, $0 \le v \le \pi$.

(b) $\Phi(\theta,\varphi) = (4\, \cos\theta\, \operatorname{sen}\varphi, 2\, \operatorname{sen}\theta\, \operatorname{sen}\varphi, 3\, \cos\varphi)$ con $0 \le \theta \le 2\,\pi$, $0 \le \varphi \le \pi$.

(c) $\Phi(r,\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, r)$ con $0 \le r \le 5$, $0 \le \theta \le \pi$.

3.- Dada la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 2, hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(1,1,\sqrt{2})$ considerándola como:

(a) Superficie parametrizada, $\Phi(\theta,\varphi) = (2\, \cos\theta\, \operatorname{sen}\varphi, 2\, \operatorname{sen}\theta\, \operatorname{sen}\varphi, 2\, \cos\varphi)$ con $0 \le \theta \le 2\,\pi$, $0 \le \varphi \le \pi$.

(b) Superficie de nivel 4 de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

(c) Gráfica de la función $g(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ con $(x,y) \in D = \big\{(x,y) : x^2 + y^2 \le 4\big\}$.

4.- (a) Hallar un parametrización para el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$

(b) Hallar una expresión para una normal unitaria a esta superficie.

(c) Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en $(x_0, y_0, 0)$, donde $x_0^2 + y_0^2 = 25$.

(d) Demostrar que las rectas $(x_0, y_0, 0) + t(-y_0, x_0{,}5)$ y $(x_0, y_0, 0) + t(y_0, -x_0{,}5)$ están en la superficie y en el plano tangente hallado en (c).

5.- Transformar la integral de superficie

$$\int\!\!\int_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}\,,$$

en una integral de línea utilizando el Teorema de Stokes y calcular entonces la integral de línea en cada uno de los siguientes casos:

a) $\vec{F}(x,y,z) = (y^2, x\,y, x\,z)$, donde S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \ge 0$ y la normal tiene componente z no-negativa. *Resultado:* 0.

b) $\vec{F}(x,y,z) = (y,z,x)$, donde S es la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ con $z \ge 0$ y la normal tiene componente z no-negativa. *Resultado:* $-\pi$.

c) $\vec{F}(x,y,z) = (y - z, y\,z, -x\,z)$, donde S consta de las cinco caras del cubo $0 \le x, y, z \le 2$ no situadas en el plano xy y la normal escogida es la exterior. *Resultado:* -4.

6.- Utilizar el Teorema de Stokes para comprobar que las siguientes integrales de línea tienen los valores que se dan, indicando en cada caso el sentido en el que se recorre C para llegar al resultado.

a) Siendo C la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y el plano $x + y + z = 0$,

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \pi\, R^2 \sqrt{3}\,.$$

b) Siendo C la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 2\,y$ y el plano $y = z$,

$$\int_C (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz = 0\,, \qquad \int_C y^2\,dx + x\,y\,dy + x\,z\,dz = 0\,.$$

c) Siendo C la curva intersección del cilindro $x^2+y^2=a^2$ y el plano $x/a+z/b=1$, con $a,b>0$,

$$\int_C (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz=2\pi\,a(a+b)\,.$$

7.- Para cada uno de los campos vectoriales que siguen, determinar un potencial, cuando el campo sea un campo conservativo,

a) $\vec{F}(x,y,z)=(x+z,-(y+z),x-y)$.

b) $\vec{F}(x,y,z)=(2\,x\,y^3,x^2\,z^3,3\,x^2\,y\,z^2)$.

c) $\vec{F}(x,y,z)=(3\,y^4\,z^2,4\,x^3\,z^2,-3\,x^2\,y^2)$.

d) $\vec{F}(x,y,z)=(4\,x\,y-3\,x^2\,z^2+1,2\,(x^2+1),-(2\,x^3\,z+3\,z^2))$.

8.- Sea S la superficie formada por las porciones de la semiesfera $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ y del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ con $x^2+y^2\leq 1/2$. Calcular $\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{dS}$ (con la orientación inducida por la normal exterior) donde

$$\vec{F}=(x\,z+e^{y\,\mathrm{sen}\,z},2\,y\,z+\cos xz,-z^2+e^x\cos y).$$

9.- Hallar la integral del campo

$$\vec{F}=(x+\cos y-\log(1+z^2),y+\mathrm{sen}\,\sqrt{1+x^2+z^2},z)$$

sobre la esfera unidad con la orientación inducida por normal exterior.

10.- Hallar la integral de superficie

$$\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{dS}\qquad\text{siendo}\qquad \vec{F}=(y-z,z-x,x-y)\,,$$

cuando S es el hemisferio norte de la esfera unidad orientada hacia el exterior. *Resultado:* 0 .

11.- Hallar la integral de superficie

$$\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{dS}\qquad\text{siendo}\qquad \vec{F}=(x^3,y^3,-a\,b\,z),$$

cuando S es el elipsoide de revolución

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1\,,$$

orientado hacia el exterior.

12.- Sea S la superficie del cubo $0\leq x,y,z\leq 1$ con la orientación correspondiente a la normal exterior. Si $\vec{F}(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)$, calcular la integral

$$\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{dS}$$

directamente y mediante el teorema de la divergencia.

13.- (*) Demostrar la llamada "fórmula de integración por partes", o "identidad de Green"

$$\int\int\int_V f\Delta g=\int\int_S f\,\nabla g-\int\int\int_V \nabla f\cdot\nabla g$$

para V un dominio acotado de R^3 limitado por S y f, g funciones C^2 arbitrarias. *Indicación:* Demostrar primero $\mathrm{div}(f\,\nabla g)=\nabla f\cdot\nabla g+f\Delta g$. Recuérdese que

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\mathrm{div}\nabla\,.$$

14.- (*) Sean C_x, C_y, $C_z\subset\mathbb{R}^3$ circunferencias de radio ε centradas en un mismo punto y paralelas, respectivamente, a los planos coordenados YZ, XZ, XY. Demostrar que en dicho punto se cumple

$$\mathrm{rot}\,\vec{F}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi\varepsilon^2}\Big(\int_{C_x}\vec{F}\cdot\vec{ds}\,,\int_{C_y}\vec{F}\cdot\vec{ds}\,,\int_{C_z}\vec{F}\cdot\vec{ds}\Big)$$

para cualquier campo $\vec{F}\in C^1$.