

Hoja 6

- 1.- Hallar el vector tangente a la curva $\sigma(t) = (t^2, t^3)$ en el punto $(1, -1)$. Escribir la ecuación de la recta tangente correspondiente. ¿Existe el vector tangente en el punto $(0, 0)$?
- 2.- Una partícula se mueve en el espacio \mathbb{R}^3 por la trayectoria $\sigma(t) = (t \cos t, t \sin t, t^2)$, donde $t \in [0, 2\pi]$. Determinar su vector velocidad en el punto $(0, \pi/2, \pi^2/4)$ y la recta tangente en dicho punto.
- 3.- Para las siguientes curvas hallar la velocidad, la rapidez (es decir, el módulo del vector velocidad), la aceleración y la ecuación de la recta tangente en el valor de t dado:

$$(a) \sigma_1(t) = (e^{-t} \sin t, e^{-t} \cos t), \quad t = 2\pi. \quad (b) \sigma_2(t) = (2t \sin(2t), 3t \cos(2t), 5t), \quad t = \frac{\pi}{2}.$$

- 4.- Una partícula sigue la trayectoria $\sigma(t) = (t \cos t, t \sin t, \sqrt{2}t^2)$ con $t \geq 0$. Cuando $t = 2\pi$, la partícula se sale por la tangente a $\sigma(t)$ y sigue desplazándose en línea recta con velocidad constante. Escribir la trayectoria que define la posición de la partícula para $0 \leq t \leq 4\pi$. ¿Cuál será su posición y su velocidad en $t = 4\pi$? ¿Cuánta distancia habrá recorrido desde el instante inicial hasta ese momento?

- 5.- Hallar la longitud de la curva en el intervalo indicado:

$$(a) \sigma(t) = (t, 4t, t^2), \quad 0 \leq t \leq 4.$$

$$(b) \sigma(t) = (2t \sin(2t), 2t \cos(2t), \sqrt{8}t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$(c) \sigma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t), \quad 0 \leq t < \infty.$$

- 6.- Calcular la longitud de la curva:

$$\sigma(t) = \begin{cases} (\cos t, \sin t, 3t) & \text{si } 0 \leq t \leq \pi, \\ (-1, -t + \pi, 3t) & \text{si } \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

- 7.- En los siguientes casos, dibujar el camino σ y hallar la integral $\int_{\sigma} f ds$.

$$(a) f(x, y, z) = x + y + z \text{ y } \sigma(t) = (\sin t, \cos t, t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

$$(b) f(x, y, z) = \frac{x+y}{y+z} \text{ y } \sigma(t) = \left(t, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}, t\right), \quad 1 \leq t \leq 2.$$

$$(c) f: \mathbb{R}^3 \setminus \{y=0\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ definida mediante } f(x, y, z) = \frac{1}{y^3} \text{ y } \sigma(t) = (\log t, t, 2), \quad 1 \leq t \leq e.$$

- 8.- Dibujar las siguientes curvas, y hallar su longitud de arco.

- (a) El arco de cicloide descrito por

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t), \end{cases}$$

$$\text{con } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- (b) La cardioide que en coordenadas polares viene dada por $r = 1 + \cos \theta$, con $0 \leq \theta \leq \pi$.

- 9.- Esbozar los siguientes campos de vectores

$$(a) F(x, y) = (-x, y).$$

$$(b) F(x, y) = (-y, x).$$

$$(c) F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

$$(d) F(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

- 10.- Mostrar que $\sigma(t) = (t^2 + 1, 2t, 3)$ es una línea de flujo del campo $F(x, y, z) = (y - 2z + 6, 3z - 7, z)$.

- 11.- Mostrar que $\sigma(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 9 \cos t \sin t)$ es una línea de flujo del campo $F(x, y, z) = (-y, x, x^2 - y^2)$.
- 12.- Hallar la divergencia y el rotacional de los campos de vectores:

$$F_1(x, y, z) = (e^{xy}, e^{yz}, e^z), \quad F_2(x, y, z) = (xy^2z^2, x^2yz^2, x^2y^2z), \quad F_3(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

- 13.- Dados $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$, y los campos de vectores en \mathbb{R}^3 , $\vec{F}, \vec{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, ambos C^1 , mostrar las siguientes identidades:

(a) $\text{rot}(f\vec{F}) = f \text{rot} \vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$.

(b) $\text{div}(f\vec{F}) = f \text{div} \vec{F} + \nabla f \cdot \vec{F}$.

(c) $\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot \text{rot} \vec{G}$.

- 14.- Mostrar que $F(x, y, z) = (x^2 + y^2, -2xy, 0)$ no es un campo gradiente.

- 15.- Dado $F(x, y, z) = (3x^2y, x^3 + y^3, 0)$, mostrar que $\nabla \times F = \vec{0}$. Hallar una función f tal que $F = \nabla f$.

- 16.- Dado $F(x, y, z) = (2x + 2y, 2x + 2yz^2, 2y^2z)$, mostrar que $\nabla \times F = \vec{0}$. Hallar una función f tal que $F = \nabla f$.

- 17.- Calcular la integral del campo $\vec{F}(x, y) = (x^2 - y, x + xy + y^2)$ a lo largo de la circunferencia unidad con la orientación positiva, primero empleando la definición de integral de línea y después empleando el teorema de Green.

- 18.- Calcular el trabajo realizado por el campo

$$\vec{F} = (5x^{3/2}e^{y^2}, 4yx^{5/2}e^{y^2} + 5y^2)$$

a lo largo de la curva descrita en coordenadas polares por la ecuación $r = 2\theta^3$ desde $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$.

- 19.- Dados los puntos $A = (2, 0)$, $B = (1, -1)$, $C = (1, 0)$ y $D = (0, -1)$ de \mathbb{R}^2 , considérese el camino Γ formado por el arco AB de la circunferencia de centro C y los segmentos orientados BD, DO, OA (O es el origen de coordenadas). Calcular la integral

$$\int_{\Gamma} (x^4 - x^3e^x - y) dx + (x - y \arctan y) dy.$$

- 20.- Hallar la integral de

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

a lo largo de la circunferencia centrada de radio r con la orientación positiva. Hallar también

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

y explicar por qué esto no contradice el Teorema de Green.