Hoja 1

1.- Hallar todos los valores de a y b para los que los vectores $x = (4, b, 1)$ e $y = (a, b, 0)$ de $\mathbb{R}^3$, son ortogonales. ¿Cuál es el lugar geométrico del plano determinado por tales a y b?

2.- Demostrar que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple

(a) $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$, (ley del paralelogramo).

(b) $\|x-y\| \cdot \|x+y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(c) $x \cdot y = 0$ si y sólo si $\|x+y\| = \|x-y\|$.

(d) $x \cdot y = 0$ si y sólo si $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(e) $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x-y\|$.

3.- Hallar, si existe, el límite de la sucesión $\{x_k\}_k$ en $\mathbb{R}^2$ cuando

$$x_k = \Big(\frac{\log k}{k}\,,\, k^{1/k}\Big). \qquad x_k = \Big((-1)^k\,,\, \frac{1}{k}\Big).$$

$$x_k = \Big(\cos\frac{k\pi}{2}\,,\, \frac{1}{k}\,\mathrm{sen}\Big(k^2 + \frac{\pi}{2}\Big)\Big). \qquad x_k = \Big(\sqrt{k^2+2} - k\,,\, \frac{1}{k^k}\Big).$$

4.- Hallar, si existe, el límite de la sucesión $\{x_k\}_k$ en $\mathbb{R}^2$ cuando

$$x_k = \Big(a_k, \frac{1}{a_k - 2}\Big)$$

y la sucesión $\{a_k\}_k$ de números reales está definida mediante

$$a_1 = \frac{1}{2}\,, \qquad 7\,a_{k+1} = a_k^3 + 6, \qquad \text{para cada } k \geq 1.$$

(Indicación: demostrar que $\{a_k\}_k$ es creciente y que cada $a_k < 1$.)

5.- Sea

$$B = \Big\{\Big(x, \mathrm{sen}\,\frac{1}{x}\Big) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\Big\}.$$

Demostrar que B no es cerrado. (Indicación: utilizar la caracterización de cerrados por medio de sucesiones).

6.- Dibujar las curvas de nivel y la gráfica de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) $f(x,y) = x - y + 2$ (b) $f(x,y) = x^2 + 4\,y^2$ (c) $f(x,y) = -x\,y$

(d) $f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)$ (e) $f(x,y) = 1 + (x^2 + y^2)$ (f) $f(x,y) = x^3 - x$

(g) $f(x,y) = \dfrac{x}{1+y^2}$ (h) $f(x,y) = \text{máx}\,\{|x|, |y|\}$ (i) $f(x,y) = \mathrm{sen}^2(x^2 + y^2)$

7.- Dibujar las superficies de nivel de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) $f(x,y,z) = x - y - z + 2$. (b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$.

(c) $f(x,y,z) = y\,(x+z)$. (d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$.

(e) $f(x,y,z) = \cos((x^2 + y^2) - z)$. (f) $f(x,y,z) = x - y$.

(g) $f(x,y,z) = \exp(x^2 + y^2 + z^2)$. (h) $f(x,y,z) = -\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - z$.

8.- Dibujar las superficies determinadas por las ecuaciones siguientes:

(a) $z = 1 - x^2 - y^2$. (b) $z = x^2 - y^2$.

(c) $z = x^2 + y^2 + 1$. (d) $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$.

(e) $x^2 + z^2 = 4$. (f) $z^2 = 1 + x^2 + y^2$.

(g) $z^2 = x^2 + y^2$. (h) $z^2 = x^2 + y^2 - 1$.

9.- Hallar los límites

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\,x^2 \operatorname{sen} y^2 + y^4 e^{-|x|}}{\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad \lim_{(x,y)\to\infty} \frac{\max\{|x|,|y|\}}{\sqrt{x^4+y^4}}.$$

10.- En cada una de las funciones que siguen, se pide determinar los conjuntos de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donde están definidas y donde son continuas.

(i) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4\,x^2y^2$. (j) $f(x,y) = \tan \dfrac{x^2}{y}$. (k) $f(x,y) = \dfrac{1}{\log(x^2+y^2)}$.

(l) $f(x,y) = \arctan \dfrac{y}{x}$. (m) $f(x,y) = \dfrac{\cos x^2}{y}$. (n) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

11.- Sea

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

definida para los $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x + y \neq 0$. Demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big) = -1.$$

¿Existe el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$?

12.- Sea $f(x, y)$ definida mediante

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$$

en los $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x^2y^2 + (x - y)^2 \neq 0$. Demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big) = \lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big) = 0$$

y que no existe el $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

13.- Demostrar que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} y \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} + x \operatorname{sen} \dfrac{1}{y} & \text{si } x, y \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

tiene límite cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ y que, sin embargo, no existen los límites iterados

$$\lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big) \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big).$$

14.- Para cada $(x, y) \neq (0, 0)$ se define

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Hallar el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de la rectas $y = \lambda x$. ¿Es posible definir $f(0, 0)$ de modo que f sea continua en $(0, 0)$?

15.- ¿Se pueden hacer continuas las funciones

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \qquad \text{y} \qquad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

definiéndolas de forma adecuada en $(0, 0)$?

16.- Sea

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad y\le 0 \quad \text{ó} \quad y\ge x^2, \\ \\ 1 & \text{si} \quad 0<y<x^2. \end{cases}$$

Demostrar que $f(x,y)\longrightarrow 0$ a lo largo de cualquier recta que pase por el origen. Hallar una curva que pase por el origen a lo largo de la cual (salvo en el origen) $f(x,y)$ tiene el valor constante 1. ¿Es f continua en el origen?

17.- Estudiar si son abiertos o cerrados los siguientes conjuntos, utilizando razonamientos con funciones continuas.

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4\,x^2+9\,y^2=36\}, \\ B &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1+\cos^2(x+y)\}, \\ C &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 4\,x^6+2\,y^2+z^4<5\}, \\ D &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\,y>1,\ \exp\big((x^2+y^2)-5\big)<1\}, \\ E &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-y^2)^4>1\}. \end{aligned}$$