Hoja 5: Integración

1. Un objeto se mueve a lo largo de un eje de coordenadas con velocidad $v(t) = t(1-t)$ unidades por segundo. Su posición inicial es 2 unidades a la izquierda del origen.
   a) Hallar la posición del objeto 10 segundos más tarde.

   b) Hallar la distancia total recorrida por el objeto en esos 10 segundos.

2. Una partícula se mueve a lo largo del eje x con velocidad $v(t) = At^2 + 1$. Calcular A sabiendo que $x(1) = x(0)$. Hallar la distancia total recorrida por la partícula durante el primer segundo.

3. La concentración de oxígeno $f(t)$ en un estanque contaminado con un residuo orgánico varía a lo largo del tiempo. La velocidad de variación viene dada por:
   $$v(t) = \frac{t^2-1}{(t^2+1)^2} \qquad (t\text{="tiempo en semanas"}).$$
   a) Hallar la diferencia aproximada de concentración de oxígeno entre $t = 0$ y $t = 1$ utilizando la regla del trapecio y la regla de Simpson con 4 subintervalos.

   b) Comparar el resultado aproximado con el exacto, sabiendo que
   $$f(t) = \frac{t^2-t+1}{t^2+1}, \text{ para } t \geq 0.$$

4. El tamaño $N(t)$ de una población varía a lo largo del tiempo. Su velocidad de variación viene dada por:
   $$v(t) = \frac{30\,e^{-0'1t}}{(1+3\,e^{-0'1t})^2} \qquad (t\text{="tiempo en años"}).$$
   a) Calcular la variación de la población entre $t = 0$ y $t = 20$: obtener el resultado exacto y el resultado aproximado utilizando la regla del trapecio y la regla de Simpson con 2 subintervalos.

   b) Si $N(0) = 25$. ¿cuál es el tamaño de la población al cabo de 20 años?

5. Se observa que la velocidad de variación del número de individuos de una población viene dada por:
   $$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{100}(x-100)(200-x).$$
   Inicialmente hay $x(0) = 180$ individuos.

   a) Hallar la función $x(t)$.

   b) Calcular en qué valor tiende a estabilizarse la población cuando el tiempo crece.

6. Llamamos $x(t)$ a la proporción de individuos de una especie que existe en un instante t. Se sabe que la velocidad de crecimiento de x con respecto a t es proporcional a $x(1-x)$. Resolver la ecuación diferencial correspondiente. ¿A qué modelo de función corresponde?

7. Al abrir una cuenta en un banco de los que operan por Internet, nos dicen que nos van a abonar cada mes un 3,5% de interés sobre el capital acumulado, durante los 6 primeros meses. Si inicialmente depositamos 3000 euros, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta al cabo de esos 6 meses? Resolverlo mediante una ecuación diferencial.

8. Se está estudiando una especie de gato montés. Se cuenta la población de estos animales un cierto año y se obtiene que hay 100. Se sabe que bajo buenas condiciones medioambientales, la tasa anual de crecimiento de la población es de 1,676%. Esto puede provocar un desequilibrio ecológico en la zona. Para solucionar esto, se consideran dos planes.

   El primero es permitir la caza de un gato al final de cada año.

   El segundo es permitir que se cace un 5% de los gatos al final de cada año.

   Plantear las ecuaciones diferenciales correspondientes a cada plan y calcular cuál sería la población aproximada al cabo de 25 años, con cada uno de ellos.

9. Un tanque contiene inicialmente 100 litros de agua con sal. El contenido total de sal es de 1 Kg. En un determinado momento, se comienza a sacar líquido del tanque, a razón de 3 litros por minuto (con lo cual, cada minuto, se pierde un 3% de sal). Para que la cantidad total de líquido se mantenga constante, cada minuto se añaden 3 litros de otra solución salina cuyo contenido en sal es de 250 gramos por litro (con lo cual, cada minuto, se añaden 750 gr. de sal).

   a) Hallar la cantidad de sal en el tanque, $S(t)$, en función del tiempo, a partir de la ecuación diferencial correspondiente.

   b) Determinar el momento en que la solución del tanque contiene 13 Kg. de sal.

   c) Calcular la cantidad de sal que habrá a largo plazo.

10. Al comienzo de cierto año, se tienen censados 540 gamos en el Monte de El Pardo. El ritmo de aumento natural anual de la población es del 12%; para evitar un crecimiento descontrolado, se abaten todos los años 40 gamos.

    a) Plantear la variación anual del tamaño de la población en función del tiempo (dN/dt), y obtener $N(t)$ a partir de esta ecuación diferencial.

    b) ¿Cuál sería el número aproximado de gamos al cabo de 20 años si este plan se lleva a cabo?

11. Cada 8 horas tomamos 200 miligramos de un medicamento, y cada 8 horas el cuerpo elimina una quinta parte de lo que tiene.

    a) Escribir la función que expresa el número de miligramos en el organismo en función del tiempo (tomando como unidad de tiempo los intervalos de 8 horas).

    b) A largo plazo, ¿cuál será la cantidad de medicamento en el organismo?

12. Durante una epidemia de gripe en una población, la velocidad de propagación de la enfermedad, es decir, la velocidad de variación del número de enfermos es (aproximadamente):

$$v(t) = 1000\ t\ e^{-0,5t}$$

donde t es el número de días desde el inicio de la epidemia.

   (a) Utilizado la regla de Simpson con dos intervalos, calcula (aproximadamente) el número de individuos que se ponen enfermos durante los cuatro primeros días. Compara este valor con el valor exacto.

   (b) ¿En qué momento es máxima la velocidad de propagación de la gripe?

13. La velocidad de variación de una población de bacterias con recursos limitados viene dada por la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = -2(x-5),$$

donde x es el "número de bacterias (en millones)" y t es el "tiempo transcurrido (en horas)". Inicialmente hay 1 millón de bacterias.

(a) Hallar la función que expresa x en función de t, resolviendo la ecuación diferencial.

(b) ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 2 horas? ¿Cuántas habrá a largo plazo?