

---

Hoja 3: Modelos

---

1. El *modelo exponencial*

$$f(t) = N_0 \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)^t = N_0 e^{t \log(1 + \frac{\alpha}{100})} = N_0 e^{\beta t}$$

corresponde a un crecimiento (o decrecimiento) del tamaño de una población del  $\alpha\%$  en cada unidad de tiempo, partiendo de un valor inicial de  $N_0$  (en  $t = 0$ ).

a) Representar las funciones  $f(t) = 100e^{2t}$  y  $f(t) = 100e^{-t}$ .

b) Si el crecimiento es de un 5% por unidad de tiempo y  $N_0 = 100$ , ¿cuál es la velocidad de crecimiento de  $f(t)$  en el instante  $t = 3$ ? ¿Y en  $t = 50$ ?

2. La *función logarítmica*

$$y = f(x) = a + b \log x \quad (\text{para } x > 0)$$

se utiliza, por ejemplo, para describir empíricamente la relación entre la concentración ( $x$ ) de una hormona de crecimiento para plantas y el tamaño alcanzado por la planta ( $y$ ).

a) Representar la función  $f(x) = 100 + 2 \log x$ .

b) Hallar la concentración  $x_0$  para la cual  $f'(x_0) = 1$ . ¿Cómo varía el tamaño de la planta al incrementar o disminuir la concentración  $x_0$  en pequeñas cantidades?

3. Hace tiempo, los zoólogos encontraron que las medidas realizadas en dos partes diferentes del cuerpo ( $X$  e  $Y$ ) de individuos en crecimiento de una especie animal, se podían relacionar (aproximadamente) de la siguiente forma:

$$\log y = k + b \log x \quad (\text{relación alométrica}),$$

o lo que es igual:

$$y = e^k e^{b \log x} = ax^b, \quad \text{para } x > 0.$$

Representar las funciones  $y = 2x^3$  e  $y = 2x^{1/2}$ .

4. Una función muy utilizada para representar el tamaño de un cultivo de microbios a lo largo del tiempo es la *función logística*:

$$y = f(t) = \frac{k}{1 + ae^{-bt}}, \quad \text{para } t > 0 \quad (a, k, b > 0)$$

a) Representar la función  $y = \frac{100}{1 + 2e^{-t}}$ , para  $t > 0$ .

b) Hallar el instante en que la velocidad de crecimiento es máxima.

c) ¿En qué tamaño tiende a estabilizarse la población?

5. En una reacción bioquímica controlada por una enzima, la velocidad ( $v$ ) de conversión de una sustancia (para una cantidad fija de enzima) viene dada por

$$v = f(s) = \frac{as}{k + s}, \quad \text{para } s > 0 \quad (a, k > 0),$$

donde  $s$  es la concentración del sustrato que está siendo convertido. Esta función se conoce con el nombre de *función de Michaelis-Menten*.

- a) Representar la función.
- b) Hallar el límite cuando  $s \rightarrow \infty$  de la velocidad de conversión y calcular cuál debe ser la concentración del sustrato para que la velocidad de conversión sea la mitad de este valor.
6. La concentración de oxígeno en un estanque contaminado con un residuo orgánico viene dada por la función:

$$y = f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}, \quad \text{para } 0 \leq t < \infty,$$

donde  $t$  representa el tiempo en semanas.

- a) Representar la función.
- b) Hallar los instantes en los que se alcanzan las concentraciones máxima y mínima de oxígeno.
- c) Hallar el instante en que la velocidad de crecimiento de la concentración de oxígeno es máxima.
7. Obsérvese que si se pierde un 50%, después hay que ganar un 100% para volver a la situación original. Calcular qué porcentajes habría que perder para volver a la situación original después de ganar un: 25%, 300%, 50%.
8. Un gas confinado en un depósito perforado, pierde una proporción fija de las moléculas por unidad de tiempo. A las 7 de la mañana medimos una concentración en el depósito de 15 *ppm* (partes por millón). Media hora más tarde la concentración ha bajado un 1% respecto a la anterior.
- a) Escribir una función que exprese la concentración del gas en función del tiempo.
- b) ¿Qué concentración había las 3 : 30 de la mañana, antes de nuestra primera medición?
- c) ¿Cuanto tardará en bajar la concentración hasta 3 *ppm*?
9. En el vertedero de basura de Valdemingómez se ha observado que cada año los camiones de la CAM depositan un 5% más de basura que el año anterior. Como la basura no se retira, se va acumulando.
- a) Escribir una función que exprese la cantidad de basura depositada cada año por los camiones de la CAM en el vertedero.
- b) Encontrar una fórmula que de la cantidad de basura acumulada en el vertedero al cabo de  $n$  años.

c) Si inicialmente el vertedero estaba vacío y al cabo de un año contenía 1000 toneladas de basura, calcular cuantos años han de pasar para que la basura acumulada supere las 90.000 toneladas.

10. Al abrir una cuenta en un banco de los que operan por Internet, nos dicen que nos van a abonar cada mes un 3,5% de interés sobre el capital acumulado, durante los 6 primeros meses. Si inicialmente depositamos 3000 euros, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta al cabo de esos 6 meses?

11. Se está estudiando una especie de gato montés. Se sabe que bajo buenas condiciones medioambientales, la tasa anual de crecimiento de la población es de 1,676%, en condiciones medias es de un 0,549% y en condiciones adversas el número de animales decrece anualmente en un 4,5%. Se cuenta la población de estos animales un cierto año y se obtiene que hay 100.

En cada una de esas tres situaciones, escribir una función que exprese el número aproximado de animales al cabo de  $n$  años, y calcular el número aproximado de ejemplares al cabo de 25 años.

12. Considerar el *modelo exponencial*  $f(t)$  correspondiente a un crecimiento del 5% en cada unidad de tiempo, partiendo de un valor inicial de  $N_0 = 100$  (en  $t = 0$ ).

a) Hallar el polinomio de Taylor de grado 3 para aproximar  $f(t)$  alrededor de  $t = 0$ .

b) Comparar el valor exacto y el aproximado del tamaño de la población al cabo de 2 unidades de tiempo.

13. Hallar el polinomio de Taylor de grado 4 para aproximar la función  $f(t) = \log(1+t)$  alrededor de  $t = 0$ . Comparar el valor exacto y el aproximado para  $t = 1$ .

14. Un estudiante decide aceptar un contrato en prácticas de un año (para obtener créditos de libre configuración). Tiene dos ofertas.

La empresa A le ofrece un sueldo de 200 euros el primer mes y revisión salarial cada mes con aumento de sueldo: cada mes le pagarán un 5% más que el anterior.

La empresa B le ofrece un sueldo de 200 euros el primer mes y revisión salarial cada mes con aumento de sueldo: cada mes le pagarán 5,5 euros más que el anterior.

a) Para cada una de las ofertas obtener, razonadamente, el sueldo que obtendría el último mes del año.

b) Para cada una de las ofertas obtener, razonadamente, el sueldo total que obtendría en un año.

15. El número  $N$  de cabezas de ganado vacuno (en miles) en una región se ve afectado por una epidemia. Como consecuencia, este número empieza a disminuir, hasta que las eficaces medidas del gobierno comienzan a solucionar la situación. La función que describe, aproximadamente, la evolución de  $N$  en función del tiempo (en años) es:

$$N(t) = \frac{5t^2 - 5t + 10}{t^2 + 1}, \text{ para } t \geq 0.$$

a) Número de cabezas de ganado al comenzar el problema.

- b) ¿Cuándo se hace mínimo el número de cabezas de ganado vacuno? ¿Cuál es el número de reses en el peor momento?
- c) ¿Cuál es la velocidad de crecimiento del número de reses al cabo de 3 años?
- d) ¿En qué valor tiende a estabilizarse  $N$  cuando va pasando el tiempo?
- e) Con los resultados de los apartados anteriores hacer una representación aproximada de la evolución de  $N$ .
16. a) La política seguida en una reserva natural para proteger cierta especie resulta un éxito, y cada año la población se incrementa en un 8%. Si al iniciar el programa se contaba con 20 ejemplares, ¿cuál es la población estimada al cabo de 30 años?
- b) ¿Cuál tendría que ser el porcentaje de incremento anual para conseguir la misma población final que en el apartado anterior, pero en solo 20 años?
17. Una sustancia radiactiva se desintegra a razón de un  $\alpha\%$  cada año.
- a) Si la cantidad de sustancia presente en este momento es de 120 Kg., hallar la expresión de la cantidad de sustancia,  $C(t)$ , al cabo de  $t$  años.
- b) Calcular el valor de  $\alpha$  sabiendo que dentro de 20 años la cantidad de sustancia presente será el doble de la que habrá dentro de 40 años.
18. Las granjas de patos contaminan el agua con nitrógeno en forma de ácido úrico. Se hace un seguimiento del nivel de ácido úrico ( $y$ ) de un río, cerca de una de estas granjas, a lo largo del tiempo (en meses). Este nivel de ácido úrico se puede describir, durante un buen período de tiempo, mediante la función:
- $$y = f(t) = 4 \log(t + 1) - 5 \log(t + 2) + 10 \quad \text{para } t \geq 0.$$
- a) ¿Cuál es el nivel de ácido úrico al comenzar el seguimiento?
- b) El nivel de ácido úrico, ¿crece o decrece en los primeros meses? ¿Cuándo alcanza su nivel máximo o mínimo? ¿Cuál es este nivel máximo o mínimo?
- c) Hacer una representación aproximada y razonada de la evolución del nivel de ácido úrico durante el período  $[0, 24]$  (los dos primeros años).
19. Dos especies de paramecios (*paramecium aurelia* y *paramecium caudata*) compiten en un nicho ecológico por los mismos recursos. El número de individuos en un mililitro ( $N$ ) de *paramecium caudata* en este ecosistema viene dado aproximadamente por la función:
- $$N(t) = 50(6t + 1)e^{-2t} \quad (t = \text{tiempo en días}).$$
- a) Número de individuos de *paramecium caudata* al empezar el estudio.
- b) Calcular el número máximo de individuos e indicar cuando se alcanza.
- c) ¿Qué ocurre con la población a largo plazo?
20. En un almacén de compost para agricultura ecológica deben decidir la cantidad y la frecuencia con la que reciben el material: en media, es más barato hacer pedidos

muy grandes, pero por otro lado, los pedidos grandes son más caros de almacenar. El coste por semana  $C$  para  $q$  toneladas de compost viene dado por la expresión:

$$C(q) = \frac{40}{q} + 10q \quad \text{para } q > 0$$

- (a) ¿Cuál de los términos,  $40/q$  ó  $10q$ , representa los gastos por pedido? ¿Cuál representa los gastos de almacenaje?
- (b) ¿Cuál es el valor de  $q$  que da el coste mínimo?
- (c) Dibuja la gráfica de  $C$  como función de  $q$ .

21. El número de individuos de una población (en miles) viene dado de manera aproximada por la función

$$N(t) = 2 + e^{-\frac{t}{2}} \quad \text{para } t \geq 0 \quad (t=\text{años})$$

- a) Representar la función.
- b) ¿A qué valor tenderá el tamaño de la población a largo plazo?

22. Se hace un seguimiento del número de jabalíes en un coto de caza. Al iniciar el estudio hay 500 ejemplares. Al cabo de 15 años hay 2000.

- (a) Cada año, la población aumenta aproximadamente un mismo porcentaje (un  $\alpha\%$ ). ¿Cuánto vale ese porcentaje?
- (b) ¿Cuántos jabalíes habrá aproximadamente dentro de otros cinco años?