Hoja 2: Derivadas, gráficas de funciones y polinomios de Taylor

1.- Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^3 x}{x^4+x^3}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)^2\ \operatorname{sen}^2 x}{\tan^3 x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x+x^2}{2\,x^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} (7\,x+5\,x^4)^{\frac{1}{6+2\,\log(2\,x+1)}}$ (e) $\lim\limits_{x\to 0^+} |\operatorname{sen} x|^{\frac{1}{\log x}}$ (f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log(x^4+x^2+1)}{\log(x^{10}+x^7+100)}$

2.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $y=\log\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ (b) $y=\operatorname{sen}(\log x)$ (c) $y=\log(x^2\ \log^3 x)$

(d) $y=x^{\tan(2\,\pi x)}$ (e) $y=\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x^2-1}$ (f) $y=\arctan\sqrt{x^2-1}$

(g) $y=x^{\frac{1}{x}}$ (h) $y=x^{\log x}$ (i) $y=(\log x)^x$

(j) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ (k) $y=\tan(x^2+\log x+\arctan x)$ (l) $y=2^{\sec(x^3+7\,x-10)}$

(m) $y=\sec(\operatorname{cosec} x)$ (n) $y=(x^2+1)^{e^x}$ (ñ) $y=e^{e^x}$

3.- Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones. Calcular la derivada en los puntos que exista.

(a) $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ (b) $f(x)=\arccos x$ (c) $f(x)=\dfrac{x^3}{|x|}$

(d) $f(x)=2^{-\frac{1}{|x|}}$ (e) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ (f) $f(x)=x^2\ \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

4.- Hallar el valor de los parámetros para que las funciones que se definen a continuación sean derivables en todo su dominio:

$$f_1(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\le 2,\\ a\cdot x+b & \text{si} \quad x>2.\end{cases} \qquad f_2(x)=\begin{cases} a+b\cdot x^2 & \text{si} \quad |x|\le 2,\\ \dfrac{1}{|x|} & \text{si} \quad |x|>2.\end{cases}$$

$$f_3(x)=\begin{cases} a\cdot\cos x & \text{si} \quad x\le 0,\\ b-x^2 & \text{si} \quad 0<x<1,\\ c\cdot\arctan x & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases} \qquad f_4(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}(\pi\,x)+a & \text{si} \quad x\le 0,\\ a+b\cdot x & \text{si} \quad 0<x<2,\\ c\cdot e^{x^2} & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$$

5.- Calcular el valor máximo y mínimo de la función $f(x) = x^3 - 3\,x^2 - 9\,x + 1$ en el intervalo $[-2, 6]$.

6.- Demostrar que la ecuación $6\,x^5 + 13\,x + 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

7.- Estudiar y representar las gráficas de las siguientes funciones en el conjunto de puntos donde estén definidas.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 2}$ (b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4\,x + 5}$ (c) $f(x) = e^{-x^2}$

(d) $f(x) = 1 + \dfrac{16}{2^{\frac{1}{x}} - 4}$ (e) $f(x) = \operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (f) $f(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

(g) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \log|x|$ (h) $f(x) = \log\dfrac{1 + x}{1 - x}$

(i) $f(x) = \begin{cases} |2\,x + 1| & \text{si} \quad x \leq 1, \\ x^2 - 2\,x + 4 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$

8.- Hallar el polinomio de Taylor de grado 4 de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \cos x$ en $a = \frac{\pi}{4}$ (b) $f(x) = \log x$ en $a = 1$ (c) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ en $a = 1$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ en $a = 0$ (e) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$ en $a = 0$ (f) $f(x) = \arctan x$ en $a = 0$

(g) $f(x) = \log(1 + x)$ en $a = 0$ (h) $f(x) = 3 + (x - 1) + 2\,(x - 1)^2 + 5\,(x - 1)^3$ en $a = 0$