Matemáticas Curso 2010-2011.
Primero de Biológicas

Hoja 1: Límites y continuidad de funciones

1.- Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

$$(a)\quad f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6},\qquad (b)\quad f(x)=\sqrt{x^2-1},$$

$$(c)\quad f(x)=\frac{1}{x-\sqrt{1-x^2}},\qquad (d)\quad f(x)=\frac{1}{1-\log x},$$

$$(e)\quad f(x)=\frac{\sqrt{5-x}}{\log x},\qquad (f)\quad f(x)=\log(x-x^2).$$

2.- Estudia la simetría de las siguientes funciones:

$$(a)\quad f(x)=\frac{x}{x^2-1},\qquad (b)\quad f(x)=\sqrt{1-x^2},$$

$$(c)\quad f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x},\qquad (d)\quad f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\cos x.$$

3.- Si f y g son dos funciones impares, ¿cómo son $f+g$, $f\cdot g$ y $f\circ g$? ¿Y si f es par y g impar?

4.- Estudia cuáles de las siguientes funciones son inyectivas, hallando su inversa en caso de que lo sean, o un ejemplo de dos puntos con la misma imagen en caso de que no lo sean.

$$(a)\quad f(x)=7x-4,\qquad (b)\quad f(x)=\operatorname{sen}(7x-4),$$

$$(c)\quad f(x)=(x+1)^3+2,\qquad (d)\quad f(x)=\frac{x+2}{x+1},$$

$$(e)\quad f(x)=x^2-3x+2,\qquad (f)\quad f(x)=\frac{x}{x^2+1},$$

$$(g)\quad f(x)=\mathrm{e}^{-x},\qquad (h)\quad f(x)=\log(x+1).$$

5.- Esboza, con los mínimos cálculos posibles, la gráfica de las siguientes funciones:

$(a)\quad f(x) = (x+2)^2 - 1,$	$(b)\quad f(x) = \sqrt{4-x},$
$(c)\quad f(x) = \text{mín}\{x, x^2\},$	$(d)\quad f(x) = x^2 + 1/x,$
$(e)\quad f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x},$	$(f)\quad f(x) = \lvert \mathrm{e}^x - 1 \rvert,$
$(g)\quad f(x) = \lvert x^2 - 1 \rvert,$	$(h)\quad f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]},$
$(i)\quad f(x) = \text{sen}(1/x),$	$(i)\quad f(x) = x\,\text{sen}(1/x).$

Indicación: $[x] = n$ denota la parte entera de x, es decir, el mayor entero $n \leq x$.

6.- Calcula los siguientes límites simplificando los factores comunes que puedan aparecer:

$(a)\quad \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2-4},$	$(b)\quad \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{3-\sqrt{x^2+8}},$
$(c)\quad \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2},$	$(d)\quad \lim\limits_{x\to -1} \left(\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{12}{x^2+6x+5}\right),$
$(e)\quad \lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{2}{x-1}\right),$	$(f)\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}.$

7.- Discutir la existencia de los límites siguientes y calcular su valor si es posible:

$(a)\quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+4x-7}{7x^2-\sqrt{2x^6+x^5}},$	$(b)\quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(3x^2-1)^2(x+7)^3}{x^7+6},$
$(c)\quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5}}{x^2-7},$	$(d)\quad \lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x} - x\right),$
$(e)\quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1},$	$(f)\quad \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1},$
$(g)\quad \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{1/x},$	$(h)\quad \lim\limits_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{1/x},$
$(i)\quad \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\mathrm{e}^{1/x}}{1+\mathrm{e}^{1/x}},$	$(j)\quad \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-\mathrm{e}^{1/x}}{1+\mathrm{e}^{1/x}},$
$(k)\quad \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4},$	$(l)\quad \lim_{x\to 1} \frac{\lvert x-1 \rvert}{x-1},$
$(m)\quad \lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x^2},$	$(n)\quad \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\text{sen}\,\frac{1}{x}.$

8.- Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$(a)\quad f(x)=\frac{x^3-8}{x^2-4}, \qquad (b)\quad f(x)=x-[x],$$

$$(c)\quad f(x)=\frac{\mathrm{e}^{-5x}+\cos x}{x^2-8x+12}, \qquad (d)\quad f(x)=\mathrm{e}^{3/x}+x^3-9,$$

$$(e)\quad f(x)=x^3\,\mathrm{tg}(3x+2), \qquad (f)\quad f(x)=\sqrt{x^2-5x+6},$$

$$(g)\quad f(x)=(\operatorname{arc\,sen} x)^3, \qquad (h)\quad f(x)=(x-5)\log(8x-3),$$

(i) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\in[a-1,a), \\ x+a & \text{si} \quad x\in[a,a+1]. \end{cases}$

(j) $f(x)=\begin{cases} -|\operatorname{sen} x|-4 & \text{si} \quad x<\pi, \\ |\cos x|-5 & \text{si} \quad x\geq\pi. \end{cases}$

(k) $f(x)=\begin{cases} \arctan x & \text{si} \quad x\leq 0, \\ \operatorname{sen}(\pi\,x) & \text{si} \quad 0<x<1, \\ |x^2-5\,x+4| & \text{si} \quad x\geq 1. \end{cases}$

(l) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2+2^{\tan x}} & \text{si} \quad x\in[0,\pi],\ x\neq\dfrac{\pi}{2}; \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x=\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$