MATEMÁTICAS
1º curso de CC. Biológicas

FUNCIONES DE UNA VARIABLE

1. El *modelo exponencial*

$$y = N_0 \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)^t = N_0 e^{t \ln(1+\frac{\alpha}{100})} = N_0 e^{\beta t}$$

corresponde a un crecimiento (o decrecimiento) del tamaño de una población del $\alpha\%$ en cada unidad de tiempo, partiendo de un valor inicial de N_0 (en $t = 0$).

a) Representar las funciones $y = 100e^{2t}$ e $y = 100e^{-t}$.

b) Si el crecimiento es de un 5% por unidad de tiempo y $N_0 = 100$, ¿cuál es la velocidad de crecimiento de y en el instante $t = 3$? ¿Y en $t = 50$?

2. La *función logarítmica*

$$y = a + b \ \ln x \qquad \text{(para } x > 0\text{)}$$

se utiliza, por ejemplo, para describir empíricamente la relación entre la concentración (X) de una hormona de crecimiento para plantas y el tamaño alcanzado por la planta (Y).

a) Representar la función $y = 100 + 2\ln x$.

b) Hallar la concentración X para la cual la magnitud Y crece una unidad por cada unidad de aumento de la concentración.

3. Hace tiempo, los zoólogos encontraron que las medidas realizadas en dos partes diferentes del cuerpo (X e Y) de individuos en crecimiento de una especie animal, se podían relacionar (aproximadamente) de la siguiente forma:

$$\ln y = k + b \ \ln x \qquad \textit{(relación alométrica),}$$

o lo que es igual:

$$y = e^k e^{b \ln x} = a x^b, \qquad \text{para } x > 0.$$

Representar las funciones $y = 2x^3$ e $y = 2x^{1/2}$.

4. Una función muy utilizada para representar el tamaño de un cultivo de microbios a lo largo del tiempo es la *función logística*:

$$y = f(t) = \frac{k}{1 + ae^{-bt}}, \qquad \text{para } t > 0 \qquad (a, k, b > 0)$$

a) Representar la función $y = \frac{100}{1+2e^{-t}}$, para $t > 0$.

b) Hallar el instante en que la velocidad de crecimiento es máxima.

c) ¿En qué tamaño tiende a estabilizarse la población?

5. En una reacción bioquímica controlada por una enzima, la velocidad (v) de conversión de una sustancia (para una cantidad fija de enzima) viene dada por

$$v = f(s) = \frac{as}{k+s}, \qquad \text{para } s > 0 \qquad (a, k > 0),$$

donde s es la concentración del sustrato que está siendo convertido. Esta función se conoce con el nombre de *función de Michaelis-Menten.*

a) Representar la función.

b) Hallar la velocidad máxima de conversión que se puede alcanzar.

c) Calcular cuál debe ser la concentración del sustrato para que la velocidad de conversión sea la mitad de la máxima alcanzable.

6. La concentración de oxígeno en un estanque contaminado con un residuo orgánico viene dada por la función:

$$y = f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}, \text{ para } 0 \leq t < \infty,$$

donde t representa el tiempo en semanas.

a) Representar la función.

b) Hallar los instantes en los que se alcanzan las concentraciones máxima y mínima de oxígeno.

c) Hallar el instante en que la velocidad de crecimiento de la concentración de oxígeno es máxima.

7. Obsérvese que si se pierde un 50%, después hay que ganar un 100% para volver a la situación original. Calcular qué porcentajes habría que perder para volver a la situación original después de ganar un: 25%, 300%, 50%.

8. Un gas confinado en un depósito perforado, pierde una proporción fija de las moléculas por unidad de tiempo. A las 7 de la mañana medimos una concentración en el depósito de 15 *ppm* (partes por millón). Media hora más tarde la concentración ha bajado un 1% respecto a la anterior.

a) Escribir la función que expresa la concentración del gas en función del tiempo.

b) ¿Que concentración había a las 3 : 30 de la mañana, antes de que hiciésemos nuestra primera medición?

c) ¿Cuanto tardará en bajar la concentración hasta 3 *ppm*?

9. En el vertedero de basura de Valdemingómez se ha observado que cada año los camiones de la CAM depositan un 5% más de basura que el año anterior. Como la basura no se retira, se va acumulando.

a) Escribir la función que expresa la cantidad de basura depositada cada año por los camiones de la CAM en el vertedero.

b) Encontrar la fórmula que da la cantidad de basura acumulada en el vertedero al cabo de n años.

c) Si inicialmente el vertedero estaba vacío y al cabo de un año contenía 1000 toneladas de basura, calcular cuantos años han de pasar para que la basura acumulada supere las 90.000 toneladas.

10. Al abrir una cuenta en un banco de los que operan por Internet, nos dicen que nos van a abonar cada mes un 3,5% de interés sobre el capital acumulado, durante los 6 primeros meses. Si inicialmente depositamos 3000 euros, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta al cabo de esos 6 meses?

11. Se está estudiando una especie de gato montés. Se sabe que bajo buenas condiciones medioambientales, la tasa anual de crecimiento de la población es de 1,676%, en condiciones medias es de un 0,549% y en condiciones adversas el numero de animales decrece anualmente en un 4,5%. Se cuenta la población de estos animales un cierto año y se obtiene que hay 100.

    En cada una de esas tres situaciones, escribir la función que expresa el número de animales al cabo de n años, y calcular cuántos ejemplares habría al cabo de 25 años.

12. Considerar el *modelo exponencial* correspondiente a un crecimiento del 5% en cada unidad de tiempo, partiendo de un valor inicial de $N_0 = 100$ (en $t = 0$).

    a) Hallar el polinomio de Taylor de grado 3 para aproximar $f(t)$ alrededor de $t = 0$.

    b) Comparar el valor exacto y el aproximado del tamaño de la población al cabo de 2 unidades de tiempo.

13. Hallar el polinomio de Taylor de grado 4 para aproximar la función $y = f(t) = \ln(1+t)$ alrededor de $t = 0$. Comparar el valor exacto y el aproximado para $t = 1$.

14. Un estudiante decide aceptar un contrato en prácticas de un año (para obtener créditos de libre configuración). Tiene dos ofertas.

    La empresa A le ofrece un sueldo de 200 euros el primer mes y revisión salarial cada mes con aumento de sueldo: cada mes le pagarán un 5% más que el anterior.

    La empresa B le ofrece un sueldo de 200 euros el primer mes y revisión salarial cada mes con aumento de sueldo: cada mes le pagarán 5,5 euros más que el anterior.

    a) Para cada una de las ofertas obtener, razonadamente, el sueldo que obtendría el último mes del año.

    b) Para cada una de las ofertas obtener, razonadamente, el sueldo total que obtendría en un año.

15. El número N de cabezas de ganado vacuno (en miles) en una región se ve afectado por una epidemia. Como consecuencia, este número empieza a disminuir, hasta que las eficaces medidas del gobierno comienzan a solucionar la situación. La función que describe, aproximadamente, la evolución de N en función del tiempo (en años) es:

$$N(t) = \frac{5t^2 - 5t + 10}{t^2 + 1}, \text{ para } t \geq 0.$$

    a) Número de cabezas de ganado al comenzar el problema.

b) ¿Cuándo se hace mínimo el número de cabezas de ganado vacuno? ¿Cuál es el número de reses en el peor momento?

c) ¿Cuál es la velocidad de crecimiento del número de reses al cabo de 3 años?

d) ¿En qué valor tiende a estabilizarse N cuando va pasando el tiempo?

e) Con los resultados de los apartados anteriores hacer una representación aproximada de la evolución de N.

16. a) La política seguida en una reserva natural para proteger cierta especie resulta un éxito, y cada año la población se incrementa en un 8%. Si al iniciar el programa se contaba con 20 ejemplares, ¿cuál es la población estimada al cabo de 30 años?

    b) ¿Cuál tendría que ser el porcentaje de incremento anual para conseguir la misma población final que en el apartado anterior, pero en solo 20 años?

17. Una sustancia radiactiva se desintegra a razón de un $\alpha\%$ cada año.

    a) Si la cantidad de sustancia presente en este momento es de 120 Kg., hallar la expresión de la cantidad de sustancia, $C(t)$, al cabo de t años.

    b) Calcular el valor de α sabiendo que dentro de 20 años la cantidad de sustancia presente será el doble de la que habrá dentro de 40 años.

18. Las granjas de patos contaminan el agua con nitrógeno en forma de ácido úrico. Se hace un seguimiento del nivel de ácido úrico (Y) de un río, cerca de una de estas granjas, a lo largo del tiempo (en meses). Este nivel de ácido úrico se puede describir, durante un buen período de tiempo, mediante la función:

    $$y = f(t) = 4\log(t+1) - 5\log(t+2) + 10 \qquad \text{para } t \geq 0.$$

    (log = logaritmo neperiano)

    a) ¿Cuál es el nivel de ácido úrico al comenzar el seguimiento?

    b) El nivel de ácido úrico, ¿crece o decrece en los primeros meses? ¿Cuándo alcanza su nivel máximo o mínimo? ¿Cuál es este nivel máximo o mínimo?

    c) Hacer una representación aproximada y razonada de la evolución del nivel de ácido úrico durante el período [0, 24] (los dos primeros años).

19. Dos especies de paramecios (*paramecium aurelia y paramecium caudata*) compiten en un nicho ecológico por los mismos recursos. El número de individuos por mililitro (N) de *paramecium caudata* en este ecosistema viene dado por la función:

    $$N = 50(6t+1)e^{-2t} \qquad (t = \text{tiempo en días}).$$

    a) Número de individuos de *paramecium caudata* al empezar el estudio.

    b) Calcular el número máximo de individuos e indicar cuando se alcanza.

    c) ¿Qué ocurre con la población a largo plazo?

INTEGRACIÓN

1. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

   a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

   b) $\displaystyle\int x^5\,\sqrt{1-x^2}\,dx$

   c) $\displaystyle\int \log x\,dx$

   d) $\displaystyle\int e^x\,sen\,x\,dx$

   e) $\displaystyle\int x^5\,sen(x^2)\,dx$

   f) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$

   g) $\displaystyle\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx$

2. Hallar el área comprendida entre la gráfica de $f(x) = sen\,x$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2}$ y el eje x.

3. Dibujar la región delimitada por las curvas $y = 5 - x^2$ e $y = 3 - x$ y calcular su área.

4. Un objeto se mueve a lo largo de un eje de coordenadas con velocidad $v(t) = t(1-t)$ unidades por segundo. Su posición inicial es 2 unidades a la izquierda del origen. a) Hallar la posición del objeto 10 segundos más tarde. b) Hallar la distancia total recorrida por el objeto en esos 10 segundos.

5. Una partícula se mueve a lo largo del eje x con velocidad $v(t) = At^2 + 1$. Calcular A sabiendo que $x(1) = x(0)$. Hallar la distancia total recorrida por la partícula durante el primer segundo.

6. El tamaño $N(t)$ de una población varía a lo largo del tiempo. Su velocidad de variación viene dada por:

$$v(t) = \frac{30\,e^{-0'1t}}{(1+3\,e^{-0'1t})^2} \qquad (t\text{=“tiempo en años”}).$$

   a) Calcular la variación de la población entre $t = 0$ y $t = 20$: obtener el resultado exacto y el resultado aproximado utilizando la regla se Simpson con 2 subintervalos.

   b) Si $N(0) = 25$. ¿cuál es el tamaño de la población al cabo de 20 años?

7. La concentración de oxígeno $f(t)$ en un estanque contaminado con un residuo orgánico varía a lo largo del tiempo. La velocidad de variación viene dada por:

$$v(t) = \frac{t^2-1}{(t^2+1)^2} \qquad (t\text{=“tiempo en semanas”}).$$

a) Hallar la diferencia aproximada de concentración de oxígeno entre $t = 0$ y $t = 1$ mediante la regla de Simpson, considerando 4 subintervalos.

b) Comparar el resultado aproximado con el exacto, sabiendo que

$$f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}, \text{ para } t \geq 0.$$

8. La variable aleatoria X sigue una distribución $N(0; 1)$, teniendo como función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Hallar $P(X > 1,50)$ y $P(0 < X < 2)$, utilizando la regla de Simpson con 4 subintervalos. Comparar con los resultados obtenidos a partir de las tablas.

9. Llamamos $x(t)$ a la proporción de individuos de una especie que existe en un instante t. Se sabe que la velocidad de crecimiento de x con respecto a t es proporcional a $x(1 - x)$. Resolver la ecuación diferencial correspondiente. ¿A qué modelo de función corresponde?

10. Al abrir una cuenta en un banco de los que operan por Internet, nos dicen que nos van a abonar cada mes un 3,5% de interés sobre el capital acumulado, durante los 6 primeros meses. Si inicialmente depositamos 3000 euros, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta al cabo de esos 6 meses? Resolverlo mediante una ecuación diferencial.

11. Se está estudiando una especie de gato montés. Se cuenta la población de estos animales un cierto año y se obtiene que hay 100. Se sabe que bajo buenas condiciones medioambientales, la tasa anual de crecimiento de la población es de 1,676%. Esto puede provocar un desequilibrio ecológico en la zona. Para solucionar esto, se consideran dos planes.

    El primero es permitir la caza de un gato al final de cada año.

    El segundo es permitir que se cace un 5% de los gatos al final de cada año.

    Plantear las ecuaciones diferenciales correspondientes a cada plan y calcular cuál sería la población aproximada al cabo de 25 años, con cada uno de ellos.

12. Un tanque contiene inicialmente 100 litros de agua con sal. El contenido total de sal es de 1 Kg. En un determinado momento, se comienza a sacar líquido del tanque, a razón de 3 litros por minuto (con lo cual, cada minuto, se pierde un 3% de sal). Para que la cantidad total de líquido se mantenga constante, cada minuto se añaden 3 litros de otra solución salina cuyo contenido en sal es de 250 gramos por litro (con lo cual, cada minuto, se añaden 750 gr. de sal).

    a) Hallar la cantidad de sal en el tanque, $S(t)$, en función del tiempo, a partir de la ecuación diferencial correspondiente.

    b) Determinar el momento en que la solución del tanque contiene 13 Kg. de sal.

    c) Calcular la cantidad de sal que habrá a largo plazo.

13. Se observa que la velocidad de variación del número de individuos de una población viene dada por:
$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{100}(x - 100)(200 - x).$$
Inicialmente hay $x(0) = 180$ individuos.

a) Hallar la función $x(t)$.

b) Calcular en qué valor tiende a estabilizarse la población cuando el tiempo crece.

14. Consideramos la ecuación diferencial
$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{tx}{1+t^2} \qquad \text{con } x(0) = 1.$$
Hallar la función $x(t)$.

15. Al comienzo de cierto año, se tienen censados 540 gamos en el Monte de El Pardo. El ritmo de aumento natural anual de la población es del 12%; para evitar un crecimiento descontrolado, se abaten todos los años 40 gamos.

a) Plantear la variación anual del tamaño de la población en función del tiempo (dN/dt), y obtener $N(t)$ a partir de esta ecuación diferencial.

b) ¿Cuál sería el número aproximado de gamos al cabo de 20 años si este plan se lleva a cabo?

16. Cada 8 horas tomamos 200 miligramos de un medicamento, y cada 8 horas el cuerpo elimina una quinta parte de lo que tiene.

a) Escribir la función que expresa el número de miligramos en el organismo en función del tiempo (tomando como unidad de tiempo los intervalos de 8 horas).

b) A largo plazo, ¿cuál será la cantidad de medicamento en el organismo?

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

1. Identificar las curvas de nivel y dibujar algunas de ellas.

   (a) $f(x, y) = x^2 - y$.

   (b) $f(x, y) = x - y$.

   (c) $f(x, y) = xy$.

2. Calcular las derivadas parciales

   (a) $f(x, y) = x^2 - y$.

   (b) $f(x, y) = 3x^2 - xy + y$.

   (c) $f(x, y) = x^2 e^{-y}$.

   (d) $f(x, y, z) = xy + yz + zx$.

3. Halla y clasifica los puntos críticos de las siguientes funciones.

   (a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5$.

   (b) $xy^2 + 2x^2y - 6xy$.

4. Para guardar muestras, necesitamos cajas de cartón, como las de zapatos, pero con la tapa de plástico. Cada cm^2 de cartón cuesta un céntimo de euro y cada cm^2 de plástico cuesta tres céntimos. Las cajas deben tener una capacidad de 2000 cm^3. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja más barata posible?

5. Se pretende excavar un agujero cilíndrico en el suelo para que contenga un recipiente de residuos orgánicos de $1\,m^3$ de volumen. El coste de la excavación es proporcional a $A(1 + p^2)$, siendo p la profundidad y A el área (circular) excavada.

   Hallar los valores de r y p que dan el coste mínimo.

6. Se quiere construir un cilindro para almacenar de manera segura residuos peligrosos con un volumen V fijo, de forma que el material utilizado tenga coste mínimo. Resulta que el material utilizado para las paredes laterales cuesta el doble que el material utilizado para el fondo y que el material utilizado para la tapa cuesta el triple que el utilizado para el fondo. Queremos calcular cuales son las dimensiones r (radio del cilindro) y h (altura del cilindro) que proporcionan el resultado óptimo (el más barato).

7. Se desea construir una balsa para lodos con forma de paralelepípedo rectángulo y con un volumen de 1 Hm^3. ¿Qué dimensiones debe tener para que la suma de la superficie lateral más la superficie del fondo (que son las que van recubiertas) sea mímima?

8. Halla el volumen máximo de un paralelepípedo rectángulo en el que la suma de las longitudes de las tres aristas es 1.

APLICACIONES DEL ÁLGEBRA LINEAL: DINÁMICA DE POBLACIONES

1. Resolver los siguientes SEL:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$$

2. Realizar las siguientes multiplicaciones de matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Sea A la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Realiza la siguientes multiplicaciones de matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} A; \qquad A \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A; \qquad A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Hallar la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Calcula la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tal que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Una población de aves se encuentra repartida entre dos humedales A y B. Se sabe que cada día un 70% de aves del humedal A se traslada a B mientras que un 50% de aves de B lo hace a A.

   a) Describir en forma matricial la evolución de cada día al siguiente.

b) Si inicialmente había el mismo número de aves en cada humedal, ¿que porcentaje de éstas están en cada uno de ellos después de dos días?

c) Si inicialmente había 120 aves en cada humedal ¿qué evolución seguirá el sistema a largo plazo?

7. Se lleva a cabo un estudio sobre una población de ballenas azules. Las hembras son clasificadas en cuatro grupos de edad, y sobre cada grupo se obtiene la siguiente información en téminos de fertilidad (número medio de crías hembras en cada período) y en terminos de mortalidad:

GRUPO DE EDAD:	0 a 3	4 a 7	8 a 11	12 a 15
NO. MEDIO DE CRÍAS:	0	0'63	1'00	0'90
MORTALIDAD:	43%	43%	43%	100%

Formular un modelo matricial para la evolución de esta población. Si en un determinado momento, la población está formada por 20, 30, 40 y 20 ballenas hembra de cada tipo de edad, ¿cuál será la composición de la población (aproximadamente) al cabo de dos períodos de tiempo?

8. En una granja de cría de cerdos, los animales son clasificados según sus edades de la siguiente forma:

   - Cochinillos: De 0 a 1 año.
   - Lechones: De 1 a 2 años.
   - Jóvenes: De 2 a 3 años.
   - Adultos: De 3 a 4 años.

   El procedimiento de gestión de las hembras de la granja es el siguiente:

   - Se sacrifica al 60% de las que van naciendo para su consumo como cochinillos.
   - Se sacrifica para su consumo a todas las hembras cuando llegan a los 4 años. No se sacrifica a ninguna de las demás, y se supone que ningún animal muere por otras causas.
   - Se dedica a todas las hembras jóvenes y adultas a la cría. Se sabe que, en media, cada hembra joven tendrá 0,5 camadas de 5 lechones, y cada hembra adulta 0,8 camadas de 5 lechones y que el 50% de todos los nuevos nacidos serán hembras.

   Formular el modelo apropiado para describir la evolución del número de cerdas de cada clase.

9. La población de cierta especie de animales en un bosque está dividida en dos grupos de edad (jóvenes y adultos). La correspondiente matriz de Leslie es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Interpreta el significado de cada uno de los elementos de la matriz anterior.

b) Calcula el autovalor dominante de A y un autovector asociado.

c) Sea $X(k)$ el número de animales de cada grupo en la etapa k. Si en la etapa 0 hay únicamente 10 animales jóvenes en el bosque, calcula $X(1), X(2), X(3)$ y $X(4)$. A partir de $X(4)$ calcula la proporción exacta de individuos de cada grupo respecto al total de la población en la etapa 4.

d) Calcula la misma proporción de forma aproximada mediante el autovector asociado al autovalor dominante, y compara el resultado obtenido en este apartado con el del apartado anterior.

10. Supongamos que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$$

es la matriz de transición de una población de venados hembras, dividida para su estudio en jóvenes y adultas.

a) Demuestra que, a la larga, la población crecerá por un factor aproximado de 1.27.

b) Los granjeros y otras personas del área no quieren que la población crezca. Pueden controlarla permitiendo la caza de venados adultos. Si h es la proporción de adultos cazados en cada período, ¿cuál será ahora la matriz de transición? (Observación: La proporción h se considera sobre el total de adultos al final del periodo, una vez que ya se ha tenido en cuenta la natalidad y la mortalidad debida a otras causas distintas a la caza)

c) Prueba que $h = 0.6$ es una caza demasiado intensiva, es decir, la población de venados se extinguiría.

d) Es posible seleccionar h de manera que la población de venados no crezca ni desaparezca. ¿Cuál sería ese valor de h?

11. Estudiamos una población de aves. Clasificamos las hembras en tres grupos de edad: jóvenes (de 0 a 1 año), adultas fecundables (de 1 a 2 años), y adultas no fecundables (de 2 a 3 años). Sabemos que un 12% de las hembras jóvenes y un 54% de las adultas fecundables sobreviven cada año. Ninguna de las adultas no fecundables sobrevive. Cada hembra fecundable produce dos hembras al año (en promedio).

a) Describir la evolución de la población en forma matricial.

b) Transcurridos unos años, determina en que tanto por ciento crecerá o decrecerá anualmente la población de hembras.

c) Determina cuál debería ser el tanto por ciento de supervivencia de las hembras jóvenes para que la población se mantuviera estable.