Matemática Discreta
Segundo de Ingeniería Informática UAM
Curso 2008-2009

Hoja 4 (Grafos)

1. Hállese el número de vértices de los siguientes grafos:

a) G tiene 9 aristas y todos sus vértices son de grado 3.
b) G es un grafo regular con 15 aristas.
c) G tiene 10 aristas, dos de sus vértices son de grado 4, y los restantes de grado 3.

2. Describe (es decir, nombra, dibuja. . .) o explica por qué no puede existir:

a) un grafo con 7 vértices, todos de grado 3;
b) un grafo con 15 vértices y 105 aristas;
c) dos grafos no isomorfos, cada uno con 6 vértices, todos de grado de 2;
d) un grafo conexo con 8 vértices y cuya sucesión de grados sea $(1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7)$.
e) un grafo con 20 vértices y sucesión de grados

$$(\underbrace{1,1,1}_{3},\underbrace{2,2,2,2,2,2,2,2,2}_{9},\underbrace{3,3,3,3,3}_{5},\underbrace{4,4}_{2},\underbrace{5}_{1});$$

f) un grafo conexo con 25 vértices y sucesión de grados

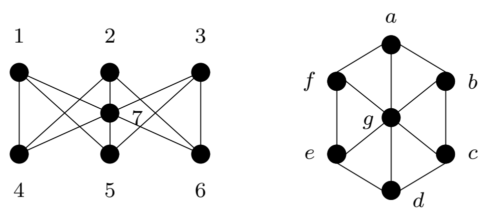
$$(\underbrace{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1}_{12},\underbrace{2,2,2,2,2,2,2,2,2}_{9},\underbrace{3,3}_{2},\underbrace{4,4}_{2}).$$

3. Demuéstrese que en todo grafo el número de vértices de grado impar es un número par.

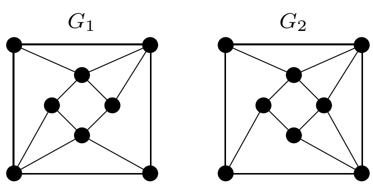
4. Prueba que en todo grafo G conexo con más de dos vértices tiene que haber al menos 2 vértices con el mismo grado.

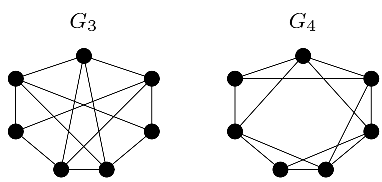
5. ¿Cuántos grafos no isomorfos con tres vértices pueden construirse? ¿Y con cuatro vértices? ¿Y con cinco?

6. Demuéstrese que los dos siguientes grafos son isomorfos. ¿Cuántos isomorfismos distintos hay entre ellos?



7. Estudia si son isomorfos los siguientes grafos:

a) 

b) 

8. (a) Sea un grafo G con n vértices y 2 componentes conexas. En estas condiciones, ¿cuál es el número máximo y mínimo de aristas que puede tener?

(b) Comprueba que si G tiene n vértices y p componentes conexas, entonces el número de aristas debe cumplir que

$$n - p \leq |A(G)| \leq \frac{1}{2}(n-p)(n-p+1).$$

9. Siete estudiantes se van de vacaciones y deciden que cada uno escribirá una tarjeta a los otros tres. ¿Es posible que cada uno de ellos reciba tarjetas de exactamente los tres a los que ha escrito?

10. Cuatro parejas celebran una fiesta. Al terminar, uno de los ocho preguntó a los demás a cuántas habían saludado al llegar, recibiendo una respuesta diferente de cada uno. ¿A cuántos había saludado la persona que hizo la pregunta? ¿Y su pareja?

11. En una reunión de 20 personas hay, en total, 48 pares de personas que se conocen.

a) Justifica por qué hay, el menos, una persona que a lo sumo conoce a otras cuatro.
b) Supongamos que sólo hay una persona que conoce a lo sumo a cuatro personas. ¿A cuántas personas conoce exactamente?

12. Sea $G = (V, A)$ un grafo con n vértices. Se define su *grafo complementario* G^{C} como aquél que tiene los mismos vértices que G y las aristas que le "faltan" a G. Esto es,

$$V(G^{\mathrm{C}}) = V(G) \qquad \text{y} \qquad A(G^{\mathrm{C}}) = A(K_n) \setminus A(G)\,.$$

a) Demuéstrese que $G = (V, A)$ y $G' = (V', A')$ son isomorfos si y sólo si sus complementarios son isomorfos.
b) Encuéntrese un grafo con 5 vértices que sea isomorfo a su complementario.
c) ¿Existe un grafo con 3 vértices que sea isomorfo a su complementario? ¿Y con 6 vértices?
d) Si G tiene n vértices y su sucesión de grados es $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, ¿cuál es la sucesión de grados de su complementario?

13. ¿Existen árboles de siete vértices y con

a) cinco vértices de grado 1 y dos de grado 2?;
b) vértices de grados $(1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$?

14. Hállese el número de árboles distintos que se pueden formar con los vértices $\{1, 2, \ldots, n\}$ si

a) $n = 6$ y cuatro vértices tienen grado 2;
b) $n = 5$ y exactamente tres vértices tienen grado 1.
c) $n = 8$, dos de los vértices tienen grado 4 y los seis restantes tienen grado 1.

15. Si G es árbol con p vértices de grado 1 y q vértices de grado 4, y ningún otro vértice, ¿qué relación hay entre p y q? Dibuja un árbol que cumpla estas condiciones con q arbitrario.

16. Un bosque es un grafo sin ciclos. Pruébese que, si G es un bosque, entonces $|A(G)| = |V(G)| - p$, donde p es el número de componentes conexas de G.

17. ¿Es cierto que

a) si $|A(G)| \geq |V(G)|$, entonces G contiene, al menos, un ciclo?;
b) si G es conexo y $|A| = |V| + 1$, entonces G posee exactamente dos ciclos?

18. Sea G un grafo conexo. Demuéstrese que G es árbol si y sólo si G tiene un único árbol abarcador.

19. Consideremos el grafo que se obtiene al tomar n triángulos con exactamente un vértice común (el número total de vértices es $2n+1$ y el número de aristas es $3n$). ¿Cuántos árboles abarcadores tiene?

20. Calcúlese el número de árboles abarcadores distintos del grafo bipartito completo $K_{2,r}$. ¿Y del grafo bipartito completo $K_{3,r}$?