Matemática Discreta
Segundo de Ingeniería Informática UAM
Curso 2007-2008

Hoja 7 (Ecuaciones de recurrencia y funciones generatrices)

1. Disponemos de n cerillas para formar palabras con las letras I (una cerilla) y V (dos cerillas). Sea P_n el número de palabras diferentes que podemos formar de esta forma utilizando las n cerillas.

a) Halla una fórmula de recurrencia para P_n.

b) ¿Qué relación tienen los P_n con los números de Fibonacci, F_n, definidos por la relación $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$? Justifica la respuesta.

c) Sea $P_{n,k}$ el número de palabras contadas en P_n que tienen k letras. Calcula $P_{n,k}$.

d) Utiliza los apartados b) y c) para demostrar la fórmula

$$F_n = \sum_k \binom{n-k}{k}$$

2. Encuentra fórmulas explícitas para los términos de las sucesiones definidas por:

$$\begin{array}{llll} (a) & u_0 = 0, u_1 = 1, & u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}, & n \geq 2; \\ (b) & u_0 = 1, u_1 = 3, & u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n, & n \geq 0. \end{array}$$

3. Resuélvanse las siguientes relaciones de recurrencia:

$$\begin{array}{lll} (a) & u_{n+1} - u_n = 3n^2 - n & \text{para } n \geq 0, \text{ con } u_0 = 3; \\ (b) & u_{n+1} - 2u_n = 2^n & \text{para } n \geq 0, \text{ con } u_0 = 1; \\ (c) & u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 7 + n + n^2 & \text{para } n \geq 0, \text{ con } u_0 = 0 \text{ y } u_1 = 2; \\ (d) & u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 3 \times 2^n + 7 \times 3^n & \text{para } n \geq 0, \text{ con } u_0 = 0 \text{ y } u_1 = 4. \end{array}$$

4. Nos regalan tres sellos y decidimos iniciar una colección. El año siguiente la incrementamos con 8 sellos más. Si cada año compramos un número de sellos igual al doble de los que compramos el año anterior, ¿al cabo de cuántos años habremos superado el millón de sellos?

5. Sea $M = \{A, B, C\}$ y sea S_n el número de listas de longitud n formadas con las letras de M que tienen las letras A en bloques de longitud par. Encontrar una relación de recurrencia para calcular S_n y resolverla.

6. (a) Encuentra la relación de recurrencia correspondiente al número de listas binarias de longitud n que no tienen unos consecutivos y halla una expresión explícita para dichas cantidades. (b) ¿Y en el caso de listas ternarias?

7. Consideramos las sucesión de números (I_n) dada por

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx, \qquad n \geq 0.$$

(a) Compruébese que la sucesión (I_n) verifica la relación de recurrencia

$$I_n = e - nI_{n-1}, \qquad \text{para } n \geq 1,$$

junto con la condición inicial $I_0 = e - 1$.

b) Para resolver la relación anterior, vamos a hacer un “cambio de variables”: considérese la sucesión (J_n) dada por

$$J_n = (-1)^{n+1}\frac{I_n}{n!\,e} \qquad \text{para cada } n \geq 0.$$

y verifíquese que

$$J_n = J_{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \qquad \text{para cada } n \geq 1.$$

c) Obténgase una fórmula para J_n y dedúzcase la correspondiente fórmula para I_n.

8. Hállense las funciones generatrices de las sucesiones siguientes:

$$\begin{array}{ll}
(a) & \left(\binom{8}{0}, \binom{8}{1}, \dots, \binom{8}{8}, 0, 0, \dots\right) \\
(b) & \left(0, \binom{8}{1}, 2\binom{8}{2}, \dots, 8\binom{8}{8}, 0, 0, \dots\right) \\
(c) & (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots) \\
(d) & (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots) \\
(e) & (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)
\end{array}$$

9. Determínese la sucesión generada por cada una de las siguientes funciones generatrices:

$$\begin{array}{ll}
a) & f(x) = (2x-3)^3 \\
b) & f(x) = \dfrac{x^4}{1-x} \\
c) & f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2} \\
d) & f(x) = \dfrac{1}{1+3x} \\
e) & f(x) = \dfrac{1}{1-x} + 3x^7 - 11 \\
f) & f(x) = \dfrac{1+3x-x^2+3x^3-x^4}{1-3x+3x^2-x^3}.
\end{array}$$

10. Hállese el coeficiente de x^{31} en $(1 + x + x^2 + \cdots)^k$, $k \in \mathbb{N}$.

11. Resuélvanse, con la técnica de las funciones generatrices, las ecuaciones de recurrencia de los ejercicios 2 y 3 de esta misma hoja.

12. Obténganse, utilizando funciones generatrices, los valores de las siguientes sumas:

$$a)\ \sum_k k\binom{n}{k}; \qquad b)\ \sum_k 3^{-k}\binom{n}{k}; \qquad c)\ \sum_{k=1}^{n} k^2; \qquad d)\ \sum_n \frac{n^2}{3^n}.$$

13. Para cada $n \geq 0$, definimos

$$a_n = \sum_k \binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2^k}.$$

(a) Calcula el valor de a_n.

(b) Calcula el valor de la suma

$$\sum_n \binom{n+1}{2} a_n .$$

14. La sucesión de números $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ está definida mediante

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + c_{n-2} \qquad \text{para } n \geq 2,$$

donde $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ es una cierta sucesión cuya función generatriz es $g(x)$. Expresa, en términos de $g(x)$, la función generatriz $f(x)$ asociada a la sucesión (a_n).