Matemática Discreta
Segundo de Ingeniería Informática UAM
Curso 2007-2008

Hoja 3 (Combinatoria)

1. Calcula el número de particiones de 15 elementos en 5 grupos de 1, 2, 3, 4 y 5 elementos, respectivamente.

2. Calcula el número de particiones del conjunto $\{A, B, C, D, E\}$ tales que:

a) A y B están en la misma parte;

b) A y B están en distintas partes.

3. Calcúlese el número de maneras de repartir n libros en k cajas de tal manera que todas las cajas tengan algún libro si:

a) los libros son distintos y las cajas iguales;

b) los libros son iguales y las cajas distintas.

4. Sea n un entero positivo que es producto de m primos diferentes. ¿De cuántas maneras podemos escribir n como producto de k enteros de la forma

$$n = n_1 \times \cdots \times n_k\,, \qquad (\text{con } 1 < n_1 < \cdots < n_k)\ ?$$

5. Calcula el número de particiones de un conjunto de 5 elementos que tenga:

a) cualquier cantidad de partes;

b) como mucho tres partes no vacías;

c) al menos 3 partes no vacías.

6. Calcula el número de distribuciones de 5 bolas distintas en 2 cajas rojas y 1 caja azul si no puede quedar ninguna caja vacía.

7. Calcula el número de maneras de distribuir 11 bolas idénticas en 3 cajas idénticas con al menos 2 bolas en cada caja.

8. Calcula el número de particiones del número 11 teniendo exactamente 3 partes, todas ellas mayores o iguales que 2.

9. Calcula el número de particiones de 8 que tengan:

a) cualquier número de partes positivas;

b) como mucho 3 partes positivas;

c) al menos 3 partes positivas;

10. Calcula el número total de particiones de 12 en sumandos positivos que tienen todos sus sumandos distintos.

11. Compruébese que

$$S(n,n-1) = \binom{n}{2}$$

y que

$$S(n,n-2) = \binom{n}{3} + \frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}.$$

Hállese una fórmula análoga para $S(n,n-3)$.

12. Compruébese que

$$S(n,2) = \frac{2^n - 2}{2}\,.$$

Obténgase una fórmula análoga para $S(n,3)$.

13. Pruébese la identidad siguiente:

$$S(n+1,m+1) = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} S(k,m) \qquad (\text{si } m \geq 1)\,.$$

(Sugerencia: constrúyase primero el bloque que contiene a $n+1$.)

14. Llamemos B_n, el n-ésimo número de Bell, al número total de particiones del conjunto $\{1,\ldots,n\}$. Esto es,

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\,.$$

Pruébese que

$$B_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B_k\,.$$