Matemática Discreta
Segundo de Ingeniería Informática UAM
Curso 2007-2008

Hoja 2 (Combinatoria)

1. Calcula

a) el número de palabras de 3 letras del alfabeto $\{A, B, \ldots, J\}$ que tienen todas sus letras distintas y en orden alfabético;

b) el número de palabras de 8 letras del alfabeto $\{A, B, C\}$ que contienen tres Aes;

c) el número de distribuciones de 5 bolas distintas en 3 cajas distintas si no puede quedar ninguna caja vacía;

d) el número de formas de repartir 40 cartas iguales entre 4 personas;

e) el número de maneras de distribuir 5 bolas rojas y 5 bolas azules en 3 cajas distintas;

f) el número de maneras de distribuir 5 bolas idénticas en 3 cajas distintas si cada caja tiene que tener al menos una bola.

g) el número de maneras de distribuir una clase de 25 estudiantes en grupos de 5;

2. De un conjunto de 5 pares de zapatos se escogen 3 zapatos al azar. Calcula la probabilidad de que 2 de ellos sean de la misma pareja.

3. Calcula el número de permutaciones de $(AABBCCDDEE)$ tales que:

- las 2 Aes aparecen juntas;
- las 2 Aes aparecen separadas;
- las cuatro vocales están separadas.

4. Queremos fabricar tarjetas de identificación poniendo símbolos en las casillas de una matriz 3×3. Los símbolos deben ser números enteros mayores que 0 y se exige además que la suma de los símbolos de cada fila sea 100. ¿Cuántas tarjetas distintas se pueden hacer?

5. ¿De cuántas formas se puede extraer del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ un conjunto de r números de forma que no haya dos consecutivos?

6. Consideramos el conjunto de símbolos $X = \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$. Diremos que un subconjunto A de X está *separado* si la diferencia entre cualesquiera dos de sus elementos es al menos tres unidades. Por ejemplo, $\{10, 15, 17, 40\}$ no está separado, mientras que $\{10, 15, 18, 40\}$ sí lo está. ¿Cuántos subconjuntos separados distintos de cinco elementos se pueden formar con los elementos de X?

7. Estamos interesados en apostar a las quinielas. Una apuesta consiste en elegir un resultado (de entre los tres posibles: 1, X, 2) en cada uno de los 14 partidos.

a) ¿Cuántas apuestas habremos de rellenar para asegurarnos el acierto en los 14 partidos?
b) ¿Y si nos aseguran que habrá exactamente 5 doses?
c) ¿Y si nos aseguran que no saldrán más de 5 doses?

8. ¿De cuántas formas se puede confeccionar una lista de 12 términos con las letras a, b y c de forma que aparezcan dos aes, dos bes y ocho ces, y además cada a y cada b tengan una c a ambos lados?

9. Hállense los cardinales de los conjuntos siguientes:

$$X = \{(A,B) : A,B \subset \{1,\dots,n\},\ A\cap B = \emptyset\}$$
$$Y = \{(A,B) : A,B \subset \{1,\dots,n\},\ A\subset B\}$$
$$Z = \{(A,B) : A,B \subset \{1,\dots,n\},\ A\subsetneq B\}$$

10. Una rana saltarina está situada en la casilla inferior izquierda de un tablero de ajedrez de 8×8, con la intención de llegar a la casilla opuesta en cuatro saltos, avanzando en cada uno de ellos hacia arriba y hacia la derecha. ¿De cuántas maneras lo puede hacer?

11. Compruébese que

$$\max_{j=0,\dots,2m}\left\{\binom{2m}{j}\right\} = \binom{2m}{m}.$$

Obténgase y pruébese el resultado análogo para los coeficientes binómicos $\binom{n}{j}$, donde n es impar.

12. Pruébense, con argumentos combinatorios, las siguientes identidades:

a) $$\binom{2n}{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\binom{n}{k+1}$$

b) $$\binom{2n}{n}^2 = \sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(n-k)!^2\,k!^2}$$

(*Indicación*: cuenta el número de maneras de elegir dos subconjuntos de tamaño n de $\{1,\dots,2n\}$ no necesariamente disjuntos).

c) $$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=0}^{n}\binom{j}{k}$$

(*Indicación*: clasifica los subconjuntos en función de su mayor elemento).