

Hoja 3: Límites y continuidad de funciones

1.- Utilizando la formulación en términos de  $\varepsilon$  y  $\delta$  demostrar:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{3+x} = \frac{1}{2}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{|x|} = 0, \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

2.- Discutir la existencia de los límites siguientes y calcular su valor si es posible:

$$\begin{array}{lll} (a) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4} & (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\tan x)}{x} \\ (d) \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x^2} & (e) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & (f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2 - 1)}{x - 1} \\ (g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(3 + \operatorname{sen} x)}{(x + \operatorname{sen} x)^2} & (h) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} & (i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x}}{x} \\ (j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - x + 1}{\sqrt{x} + x - 1} & (k) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+4}}{x^2 + 4x + 3} & (l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x}{x} \\ (m) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2 - 4} & (n) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4} \left[ \frac{3}{x} \right] & (\tilde{n}) \lim_{x \rightarrow 1} x \left[ \frac{3}{x} \right] \\ (o) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} \right)^{[x]} & (p) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2} \right|^3 + x^6 - 1 \right)^{[x]} & (q) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1} \end{array}$$

3.- Encontrar las constantes  $a$  y  $b$  para las cuales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - ax - b) = 1.$$

4.- Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

- (a) Si existen los límites  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ , entonces existe el límite  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .
- (b) Si no existen los límites  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , entonces no existe el límite  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ .
- (c) Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\ell|$ .

5.- Dibujar la gráfica y estudiar la continuidad de las siguientes funciones donde  $[x]$  denote la parte entera de  $x$ , es decir, el mayor entero menor o igual que  $x$ :

$$\begin{array}{lll} (a) f(x) = [x] & (b) f(x) = x - [x] & (c) f(x) = \sqrt{x - [x]} \\ (d) f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]} & (e) f(x) = \left[ \frac{1}{x} \right] & (f) f(x) = \frac{1}{\left[ \frac{1}{x} \right]} \end{array}$$

**6.-** Estudiar los puntos de discontinuidad y establecer en su caso el tipo de la misma para las siguientes funciones:

$$f_1(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, \quad f_2(x) = \frac{b}{x - b}, \quad f_3(x) = x \left[ \frac{1}{x} \right], \quad f_4(x) = [\operatorname{sen} x].$$

$$f_5(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [a - 1, a), \\ x + a & \text{si } x \in [a, a + 1]. \end{cases} \quad f_6(x) = \begin{cases} -|\operatorname{sen} x| - 4 & \text{si } x < \pi, \\ |\cos x| - 5 & \text{si } x \geq \pi. \end{cases}$$

$$f_7(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{si } x \leq 0, \\ \operatorname{sen}(\pi x) & \text{si } 0 < x < 1, \\ |x^2 - 5x + 4| & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \quad f_8(x) = \begin{cases} \frac{1}{2 + 2^{\tan x}} & \text{si } x \in [0, \pi], x \neq \frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

**7.-** Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

- (a) Si una función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  alcanza un máximo y un mínimo en todo intervalo cerrado entonces es continua.
- (b) Si una función  $f$  de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  toma todos los valores comprendidos entre  $f(a)$  y  $f(b)$  en todo intervalo  $[a, b]$  entonces es continua.
- (c) Si  $f$  es una función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  continua en 0 y tal que  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ , entonces  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$ .

**8.-** Demostrar que no existe ninguna función continua de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  que tome exactamente dos veces cada valor.

**9.-** Dar un ejemplo de función definida sobre todos los reales que sólo sea continua en los puntos 0 y 1.

**10.-** Supóngase que  $f$  y  $g$  son funciones continuas en  $[a, b]$  y que  $f(a) < g(a)$ , pero  $f(b) > g(b)$ . Demostrar que  $f(x) = g(x)$  para algún  $x$  en  $(a, b)$ .

**11.-** Supóngase que  $f$  es una función continua en  $[0, 1]$  y que  $f(x)$  está en  $[0, 1]$  para todo  $x$ . Demostrar que  $f(x) = x$  para algún  $x$  en  $[0, 1]$ .

**12.-** Demostrar que las siguientes ecuaciones tienen solución:

$$(a) \quad x - \operatorname{sen} x - 5 = 0, \quad (b) \quad x^7 + \frac{213}{2 + x^2 + \tan^2 x} = 12$$