Cálculo 1 — Curso 2007-2008.

Primero de Matemáticas

Hoja 1: Fundamentos

1.– Indicar en la recta real todos los valores de x que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $|x+1| > 3$,

(ii) $|2x+1| < 1$,

(iii) $|x-1| \leq |x+1|$,

(iv) $x^2 - 4x + 6 < x$,

(v) $|x^2 - 3| \leq 1$,

(vi) $\frac{x^2}{x^2-4} < 0$,

(vii) $\frac{x-1}{x+2} > 0$,

(viii) $|(x-2)(x-3)| < 1$,

(ix) $|x-1| + |x-2| > 1$,

(x) $\frac{|x+1|}{|x-1|} \geq 1$.

2.– Demostrar por inducción:

(i) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(ii) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(iii) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

(iv) $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

(v) $\forall\, n \geq 10,\ 2^n \geq n^3$.

(vi) $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x + y$.

(vii) El número de rectas determinado por $n \geq 2$ puntos, de los cuales ningún trío pertenece a la misma recta, es $\frac{1}{2}n(n-1)$.

(viii) $4(1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^n) + 1 = 5^{n+1}$.

(ix) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$.

(x) Si n no es múltiplo de 4 la suma $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ es múltiplo de 10. (Comprobarlo para $n = 1, 2, 3$ y demostrar que si es cierto para n, lo es para $n + 4$.)

(xi) $n(n^2 + 5)$ es divisible por 6.

(xii) $1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n-1)\,(n-1)! = n!$ para $n \geq 2$.

3.– Demostrar que para todo número natural n y a y b cualesquiera se cumple

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ y } 0! = 1.$$

Indicación. Demostrar primero que $\binom{i}{k-1} + \binom{i}{k} = \binom{i+1}{k}$.

4.– Demostrar por inducción sobre n que

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad \text{si } r \neq 1.$$

5.– Demostrar la desigualdad de Bernoulli

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \quad \text{para } x \geq -1.$$

6.– Encontrar el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos de números reales. ¿Son máximo o mínimo en algún caso?

(i) $A = \{x : x^2 < 4\}$,

(ii) $B = \{x : x^2 \geq 4\}$,

(iii) $C = \{x : x^2 \leq 4\}$,

(iv) $D = \{x : 2 < x^2 \leq 4\}$,

(v) $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,

(vi) $F = E \cup \{0\}$,

(vii) $G = \{\frac{1}{n} - (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$,

(viii) $H = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 < 3\}$.

7.– Si el conjunto A tiene supremo, ¿qué podemos decir sobre $-A = \{-x : x \in A\}$?

8.– Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de números reales tales que $a < b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$. Demostrar que existen $\sup A$, $\inf B$, y que además, $\sup A \leq \inf B$. Dar un ejemplo donde estos dos valores coincidan.

9.– Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ acotados superiormente, y sea $A + B = \{a + b : a \in A,\, b \in B\}$. Demostrar que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Indicación. Para demostrar que $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B)$ basta ver que $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B) + \epsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Elegir a en A y b en B tales que $\sup A - a < \varepsilon/2$ y $\sup B - b < \varepsilon/2$.

10.– Donde está el fallo en los siguientes razonamientos:

(a) Sea $x = y$, entonces $x^2 = x\,y$ y $x^2 - y^2 = x\,y - y^2$. Así, $(x + y)\,(x - y) = y\,(x - y)$, es decir, $x + y = y$. De aquí se sigue que $2y = y$ y por lo tanto $2 = 1$. **Contradicción!!!**

(b) Vamos a hallar los x que verifican

$$\frac{x + 1}{x - 1} \geq 1.$$

Esta desigualdad es equivalente a $x + 1 \geq x - 1$, o lo que es los mismo $1 \geq -1$. Como esto es cierto para todo $x \in \mathbb{R}$, se sigue que el conjunto de valores que verifican la desigualdad anterior es $\mathbb{R}$. De esta forma, tomando en particular $x = -1$ obtenemos

$$0 = \frac{-1 + 1}{-1 - 1} \geq 1. \qquad \textbf{Contradicción!!!}$$