
Hoja 1: Fundamentos

1.– Indicar en la recta real todos los valores de x que satisfacen las siguientes condiciones:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------------|
| (i) $ x + 1 > 3$, | (vi) $\frac{x^2}{x^2-4} < 0$, |
| (ii) $ 2x + 1 < 1$, | (vii) $\frac{x-1}{x+2} > 0$, |
| (iii) $ x - 1 \leq x + 1 $, | (viii) $ (x - 2)(x - 3) < 1$, |
| (iv) $x^2 - 4x + 6 < x$, | (ix) $ x - 1 + x - 2 > 1$, |
| (v) $ x^2 - 3 \leq 1$, | (xii) $\frac{ x+1 }{ x-1 } \geq 1$. |

2.– Demostrar los siguientes enunciados:

- | | |
|------------------------------|-----------------------------------|
| (i) $ xy = x \cdot y $, | (iii) $ x - y \leq x + y $, |
| (ii) $ x^2 = x ^2$, | (iv) $ x - y \leq x - y $. |

Indicación. En (iv) probar que $|x - y| \geq |x| - |y|$ y $|x - y| \geq |y| - |x|$.

3.– Sean a y b dos números no negativos con $a \leq b$. Demostrar que

$$a \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq b.$$

4.– Demostrar por inducción.

- (i) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
- (ii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$.
- (iii) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.
- (iv) $n! \leq n^n$.
- (v) Para todo $n \geq 10$ se tiene que $2^n \geq n^3$.
- (vi) $4(1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n) + 1 = 5^{n+1}$.
- (vii) $1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + (n-1)(n-1)! = n!$ para $n \geq 2$.

5.– Demostrar que para todo número natural n y a y b cualesquiera se cumple

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ y } 0! = 1.$$

Indicación. Demostrar primero que $\binom{i}{k-1} + \binom{i}{k} = \binom{i+1}{k}$.

6.– Demostrar por inducción sobre n que

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad \text{si } r \neq 1.$$

7.– Demostrar la desigualdad de Bernoulli

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \quad \text{para } x \geq -1$$

8.– Encontrar el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos de números reales. ¿Son máximo o mínimo en algún caso?

- | | |
|------------------------------------|--|
| (i) $A = \{x : x^2 < 4\},$ | (v) $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\},$ |
| (ii) $B = \{x : x^2 \geq 4\},$ | (vi) $F = E \cup \{0\},$ |
| (iii) $C = \{x : x^2 \leq 4\},$ | (vii) $G = \{\frac{1}{n} - (-1)^n : n \in \mathbb{N}\},$ |
| (iv) $D = \{x : 2 < x^2 \leq 4\},$ | (viii) $H = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 < 3\}.$ |

9.– Si el conjunto A tiene supremo, ¿qué podemos decir sobre $-A = \{-x : x \in A\}$?

10.– Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de números reales tales que $a < b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$. Demostrar que existen $\sup A$, $\inf B$, y que además, $\sup A \leq \inf B$. Dar un ejemplo donde estos dos valores coincidan.

11.– Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ acotados superiormente, y sea $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Demostrar que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Indicación. Para demostrar que $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B)$ basta ver que $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B) + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Elegir a en A y b en B tales que $\sup A - a < \epsilon/2$ y $\sup B - b < \epsilon/2$.