

---

CÁLCULO DE PRIMITIVAS (INTEGRALES INDEFINIDAS)

1. Calcule las siguientes primitivas:

$$\begin{aligned}
 a) \int (x^2 + 3x) \left( 5x^3 - \frac{8}{x^3} \right) dx & \quad b) \int \left( e^x(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{5x - 2} \right) dx \\
 c) \int \left( 3 \operatorname{sen}(5x) - \frac{x}{2} - \frac{5}{1 + 4x^2} \right) dx & \quad d) \int \left( \frac{x}{1 + x^2} + \frac{2}{(4x + 1)^2} + \frac{4}{\sqrt{1 - 2x^2}} \right) dx
 \end{aligned}$$

(Nota: pueden usarse las fórmulas  $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan(x/a) + C$ ;  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin(x/a) + C$ ).

2. Calcule las siguientes primitivas (integrando por partes):

$$a) \int (x^2 - 2x)e^{-5x+3} dx, \quad b) \int x \cos(5x) dx, \quad c) \int e^{-x} \operatorname{sen} x dx, \quad d) \int x\sqrt{x+1} dx.$$

3. Usando la fórmula  $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ , calcule  $I = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x dx$  y  $J = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^7 x dx$ .

4. Calcule las siguientes primitivas (usando el método de las fracciones simples):

$$\int \frac{x}{(x+1)(x-3)} dx, \quad \int \frac{x^3+1}{x^3+x} dx, \quad \int \frac{2}{(x-1)(x+3)^2} dx, \quad \int \frac{5x^2+5}{(x^2-1)(x^2+2x+2)} dx.$$

---

INTEGRAL DEFINIDA. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

5. Halle  $f'(x)$  si

$$a) f(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-2} dt, \quad b) f(x) = \int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3} dt, \quad c) f(x) = \int_{x^3}^{x^2} (1+t^2)^{-3} dt$$

6. Compruebe que

$$\int_0^x |t| dt = \frac{1}{2} x|x| \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

7. Supongamos que  $f$  es una función derivable en todo  $x$  y que satisface la ecuación

$$\int_0^x f(t) dt = -\frac{1}{2} + x^2 + x \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{2} \cos(2x) \quad \text{para todo } x \geq 0.$$

Calcule  $f(\pi/4)$  y  $f'(\pi/4)$ .

---

CÁLCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS A TRAVÉS DE PRIMITIVAS

8. Calcule  $\int_0^1 f(x) dx$ , con  $f(x)$  igual a:

$$a) \frac{1}{e^x + 4e^{-x}}, \quad b) \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}}, \quad c) \frac{4^x + 1}{2^x + 1}, \quad d) \frac{x}{\sqrt{1 + x^4}}.$$

(Nota: puede usar que  $\int dx/\sqrt{x^2+1} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + K$ ).

9. Calcule  $\int_0^{\pi/4} f(x) dx$ , con  $f(x)$  igual a:

a)  $\operatorname{tg} x$     b)  $\cos^4 x$     c)  $\operatorname{tg}^2 x$     d)  $\operatorname{sen}^5 x \cos^3 x$

---

CÁLCULO DE ÁREAS

10. Calcule el área de la región limitada por

- a) el eje  $X$  y la gráfica de  $f(x) = \operatorname{sen} x$  en el intervalo  $[0, 8\pi]$ ;  
b) el intervalo  $[0, \pi]$  del eje  $X$  y la gráfica de la función  $f(x) = [x]$  (la función “parte entera”, o “suelo”).

11. Halle el área de la región limitada por las gráficas de los pares de funciones que se indican:

a)  $f(x) = \frac{2}{4x^2+1}$     y     $g(x) = 2|x|$ ,  
b)  $f(x) = x(e^x + 1)$     y     $g(x) = x + x^2e^x$ ,

12. Dada  $f(x) = x^2 - 2x + 7$ , consideremos el triángulo curvilíneo  $T$  limitado entre las tangentes en  $x = 0$  y  $x = 2$  y la gráfica de  $f$ . Halle el área de  $T$ .

13. Halle el área de la región acotada por la curva  $y^2 = 3x$  y la recta  $2y - 2x + 3 = 0$ .

14. Dados  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , calcule el área de la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

---

INTEGRALES IMPROPIAS

15. Calcule las siguientes integrales impropias:

a)  $\int_0^{\infty} e^{-5x} dx$ ,    b)  $\int_0^1 \ln x dx$ ,    c)  $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x} dx$ .

---

APLICACIONES DE LA INTEGRAL A LAS SERIES

16. Estudie la convergencia de las siguientes series mediante el criterio de la integral:

a)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$ ,    b)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ ,    c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ ,