Series infinitas: primeras propiedades. Algunas series especiales

1. a) Para cada una de las series infinitas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+3}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^{n+1}}{n}\,, \qquad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{\log(n-1)}$$

escribe los cuatro primeros términos, a_n, y las cuatro primeras sumas parciales, S_n.

b) Escribe la fórmula más sencilla posible del término n-ésimo, a_n, de las siguientes series:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\frac{9}{10}+\dots\,, \qquad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}+\frac{1}{12}-\frac{1}{15}+\dots\,.$$

En ambos casos, calcula las sumas parciales, S_n, para $1 \le n \le 5$.

2. Escribiendo las sumas parciales como sumas telescópicas, decida la convergencia de las series correspondientes y, si procede, hállese su valor.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\frac{n}{n+1}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.$$

3. Calcular la suma de cada una de las siguientes series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^n}\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(4\cdot(0,1)^n + (-0,7)^n\right), \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \pi^{n/2} e^{-n}\,,$$

justificando previamente su convergencia.

4. Utilizando el criterio del término general, comprueba que son divergentes las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n-1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2n^3}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{\operatorname{sen}(n!)}{n}\right).$$

Series con términos no negativos: criterios de convergencia

En los siguientes ejercicios deben utilizarse los criterios vistos en clase (criterio del cociente, de la raíz, criterio de comparación) para determinar si las series convergen o no. Además de los tres anteriores, puede usarse también el llamado *criterio asintótico* de comparación: si $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = L > 0$, entonces las series de números positivos $\sum_n a_n$ y $\sum_n b_n$ convergen o divergen simultáneamente.

5. Decídase la convergencia de cada una de las siguientes series positivas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2013}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{20n-13}\,, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{2013n^2+2014}\,,$$

dando por hecho que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si y sólo si $p>1$.

6. Estudiar si las series siguientes son convergentes o no:

$a)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n2^n}$, $\quad b)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$, $\quad c)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-6}{n^3+1}$, $\quad d)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

$e)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^3}$, $\quad f)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$, $\quad g)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos(n+2)}{n^{3/2}}$, $\quad h)\ \displaystyle\sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}-3}$

7. Estudiar para qué valores del parámetro α son convergentes las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(n+1)}\,, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\alpha}, \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\alpha n}}{n^2+1}\,.$$

Series con términos de signo variable

8. Compruebe si las siguientes series convergen (absoluta o condicionalmente) o divergen:

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+n-6}{n^4+1}\,, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(n^2)\,, \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

9. Lo mismo para las series

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}\,, \qquad b)\ \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2-4}}\,, \qquad c)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{e^n}\,.$$

Ejercicios adicionales

10. Sea (a_n) una sucesión de términos positivos tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = L > 1$. Prueba que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 \cdots a_n}$$

es convergente.

11. Decidir si las siguiente afirmaciones son verdaderas (dando una pequeña explicación) o falsas (dando un contraejemplo):

a) Si $a_n > 0$ y $\sum a_n$ converge entonces $\sum a_n^2$ converge.

b) Si $a_n > 0$ y $\sum a_n$ converge entonces $\sum \frac{1}{a_n}$ diverge.

c) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces $\sum (-1)^n a_n$ converge. (Obsérvese que aquí no se pide que $a_n > 0$.)

d) Si $a_n > 0$ y a_n es monótona y no está acotada entonces $\sum a_n^{-n}$ converge.

e) Si $a_n > 0$ entonces $\sum \left(\frac{a_n}{2a_n+1}\right)^n$ converge.