

REPASO DE VALORES ABSOLUTOS, ECUACIONES Y DESIGUALDADES

1. Indique los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se satisfacen las siguientes *igualdades*:

a) $x^2 - 9x + 20 = 0$,

b) $x^2 + 2x = 1$,

c) $x^4 - 4 = 0$,

d) $\sqrt[3]{1+x} = 2$,

e) $-1 + \sin x = 0$,

f) $-1 + \log \frac{x}{e} = 0$.

2. Encuentre todos los valores $x \in \mathbb{R}$ que satisfagan las siguientes *desigualdades*:

a) $|4x + 3| \leq 1$,

b) $|x + 1| \leq |x - 1|$,

c) $|x^2 - 5x + 6| < 2$,

d) $|x + 1| + |x + 3| < 5$,

e) $\frac{x-1}{(x+2)(x-3)} > 0$,

f) $\frac{x^2-2}{x^2-4} \leq 0$,

g) $\frac{x^2+4}{x^2-2x} > 0$,

h) $\sqrt{x^2-6x+9} < 1$.

3. Decida si las siguientes desigualdades son válidas o no para *todos* los valores posibles de x e y que se indican a continuación:

a) $|x - y| \leq |x| + |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

b) $(1 + x)^2 \geq 1 + x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

c) $x^2 - x + 1 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

d) $x^4 + \frac{1}{x^4} \geq 2$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

INDUCCIÓN

4. Demuestre por inducción que las siguientes fórmulas son ciertas para todo número $n \in \mathbb{N}$:

a) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$.

c) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1}$.

5. Demuestre por inducción las siguientes afirmaciones:

a) $2^n > n^2$, para todo $n \geq 5$.

b) *Desigualdad de Bernoulli*: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, para todo $x \geq -1$, $n \geq 1$.

6. Compruebe que $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$; esto nos da $\cos 2x$ como un polinomio cuadrático de $\cos x$. Usando la inducción, demuestre que, en general,

$$\cos nx = P_n(\cos x), \quad n \geq 1,$$

donde P_n es cierto polinomio de grado n .

(*Pista:* Aplique la fórmula para el coseno de una suma a $\cos(n+1)x$ y a $\cos(n-1)x$; intente usarlas para escribir $\cos(n+1)x$ en términos de $\cos nx$ y $\cos(n-1)x$ y aplique la inducción.)

COTAS SUPERIORES E INFERIORES. ÍNFIMOS Y SUPREMOS

7. Para cada uno de los conjuntos dados abajo, indique una cota superior y una inferior. Luego determine razonadamente el ínfimo y el supremo de cada uno de ellos. Halle también el máximo y el mínimo si existen.

a) $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\}$, b) $\{0, 1; 0, 01; 0, 001; 0, 0001; \dots\}$, c) $\{\cos x + 1 : x \in \mathbb{R}\}$.

8. Indique si los siguientes conjuntos están acotados inferior y superiormente y, en su caso, halle el ínfimo, el supremo, el máximo y el mínimo.

a) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 3| \leq 1\}$, b) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 < 27\}$,
c) $\{x^2 - 6x + 9 : x \in \mathbb{R}\}$, d) $\{(-1)^n - n^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$.