HOJA 4 DE PROBLEMAS

Espacios de Hilbert

1. Algunos espacios pre-Hilbertianos.

   a) La expresión $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$ define un producto escalar en $C([0,1])$. Demostrar que $C([0,1])$ con este producto escalar **no** es un espacio de Hilbert.

   b) La expresión $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ define un producto escalar en $C_c(\mathbb{R})$. Demostrar que $C_c(\mathbb{R})$ con este producto escalar **no** es un espacio de Hilbert.

   c) ¿Sabes identificar el cierre de los espacios anteriores por la topologia dada por la norma inducida el producto escalar allí definido?

2. Demostrar que en un espacio pre-Hilbert $(\mathbb{H}, \langle\ ,\ \rangle)$ si $\|x\| = \|y\| = 1$ y $x \neq y$, se cumple $\|x + y\| < 2$. (Indicación: usar la regla del paralelogramo.)

3. Probar que la igualdad $|\langle f, g\rangle| = \|f\|\|g\|$ sólo se da cuando $f = cg$ para algún escalar $c \in \mathbb{C}$ (o bien si f ó g son idénticamente cero).

   Sugerencia: Suponer primero $\langle f, g\rangle = \|f\| = \|g\| = 1$, y en este caso probar que $\|f - g\| = 0$.

4. Demostrar que en un espacio pre-Hilbert se cumple la **identidad de polarización**:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2\right] .$$

5. Si $(\mathbb{H}, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio pre-Hilbert, demostrar que para todo $x \in \mathbb{H}$ se cumple

$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} | < x, y > | .$$

6. *a*) Demostrar que la norma $\|f\|_\infty$ definida en $L^\infty([0,1])$ no puede provenir de un producto escalar.

   b) Demostrar que $L^2([0,1])$ es el único espacio de Hilbert de entre todos los espacios $L^p([0,1]),\ 0 < p < \infty$.
   (Indicación: probar que no se cumple la ley del paralelogramo)

7. Sea $U : E_1 \to E_2$ una isometría lineal entre dos espacios de Hilbert, es decir

$$\|U(x) - U(y)\|_{E_2} = \|x - y\|_{E_1}, \quad \forall\ x, y \in E_1.$$

   Probar que U es un *operador unitario*, es decir, $\langle U(x), U(y)\rangle_{E_2} = \langle x, y\rangle_{E_1}$, $\forall\ x, y \in E$.

8. Sean A, B convexos completos de un espacio pre-hilbertiano E, tales que $\|x\| \leq M$, $\forall x \in A$. Probar que existen $a \in A$, $b \in B$ tales que

$$\|a - b\| = d(A, B) = \inf_{x\in A, y\in B} \|x - y\|.$$

9. Sea $(\mathbb{H}, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio de Hilbert.

   a) Si $E \subset \mathbb{H}$, demostrar que $E^\perp$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathbb{H}$.

   b) Si M is un subespacio vectorial cerrado de $\mathbb{H}$, demostrar que $(M^\perp)^\perp = M$.

c) Sea $\mathcal{U} = \{u_\alpha\}_\alpha$ un sistema ortonormal **no** finito. Demostrar que $\mathcal{U}$ es un conjunto cerrado y acotado, pero no compacto.

d) Si $x_0 \in \mathbb{H}$ y M es un subespacio vectorial cerrado de $\mathbb{H}$, demostrar que

$$\min\{\|x_0 - x\| : x \in M\} = \max\{\,|\langle x_0, y\rangle| :\ y \in M^\perp\ ,\ \|y\| = 1\}\,.$$

10. Sea X un espacio pre-hilbertiano. Demostrar que para $u \neq 0\,,\ v \neq 0$ se tiene:

$$\left\| \frac{u}{\|u\|^2} - \frac{v}{\|v\|^2} \right\| = \frac{\|u-v\|}{\|u\|\ \|v\|}.$$

A partir de la expresión anterior, deducir las desigualdades

$$\begin{aligned}&\|f\|\|g-h\| \le \|h\|\|g-f\| + \|g\|\|f-h\|,\\ &\|f-e\|\|g-h\| \le \|h-e\|\|g-f\| + \|g-e\|\|f-h\|.\end{aligned}$$

11. Demostrar que el conjunto

$$\mathcal{U} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,\, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\,,\, \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

es una base ortonormal de $L^2([-\pi\,,\,\pi])$.
(Indicación: usar que $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2([-\pi\,,\,\pi])$.

12. Demostrar que cada uno de los conjuntos

$$\mathcal{U}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,,\, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx \right\}_{n=1}^{\infty} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{U}_2 = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen} nx \right\}_{n=1}^{\infty}$$

es una base ortonormal de $L^2([0\,,\,\pi])$. (Indicación: como en el ejercicio anterior.)

13. Sea f una función continua y periódica de período 2π.

a) Dado α irracional, probar que para todo x

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x+\pi n\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f.$$

(*Indicación: probarlo primero para $f(t) = e^{ikt}$.*)

b) Probar que si α es racional, la igualdad no se cumple en general.

14. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{x_n\}_{n=1,\dots,N} \subset \mathcal{H}$ un sistema ortonormal. Probar que

$$\min_{(c_1,\dots,c_N)\in\mathbb{R}^N} \|x - \sum_{n=1}^{N} c_n x_n\| = \|x - \sum_{n=1}^{N} < x, x_n > x_n\|.$$

15. Demostrar el **teorema de Weierstrass**: toda función continua f sobre un intervalo $[a,b]$, puede ser aproximada uniformemente por polinomios. (*Indicación: suponer primero que f es periódica de período 2π y aproximarla por polinomios trigonométricos. Usar a continuación que $e^{ikx} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ikx)^n}{n!}$ y que la convergencia es uniforme sobre compactos.*)

16. Sea $T_n(x)$ el polinomio de Chevyshev de grado n, es decir,

$$T_0(x) = 1\,, \qquad T_n(x) = 2^{1-n}\cos(n\arccos x)\,,\ n = 1,2,3,\dots\,.$$

a) Demostrar que $T_n(x)$ es un polinomio de grado n.

b) Demostrar que $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ es un sistema ortogonal de $L^2([-1,1])$ con el producto escalar dado por

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,.$$

c) Demostrar que $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base ortonormal de $L^2([-1,1])$, donde

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,, \qquad \phi_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{2\pi}}\,T_n(x)\,,\ n = 1,2,3\ldots$$

17. Los polinomios de Legendre se definen mediante

$$P_0(x) = 1\,, \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,(x^2-1)^n\,,\ n = 1,2,3,\ldots$$

a) Demostrar que $\{P_n : n = 0,1,2,\ldots\}$ forman un sistema ortogonal de $L^2([-1,1])$. (Indicación: usar integración por partes para probar $\int_{-1}^{1} P_n(x)\,x^m\,dx = 0$ si $n > m$)

b) Demostrar que

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx = \int_{-1}^{1}(1-x)^n\,(1+x)^n\,dx = \frac{(n!)^2\,2^{2n+1}}{(2n)!\,(2n+1)}$$

usando integración por partes.

c) Usar los apartados anteriores para demostrar que $\{\sqrt{n+\frac{1}{2}}\;P_n : n = 0,1,2,\ldots\}$ forman un sistema ortonormal de $L^2([-1,1])$.

Más avanzados:

18. Sea H un espacio de Hilbert y $T : H \to H$ un operador lineal acotado. Demostrar que existe un único operador lineal acotado $T^* : H \to H$ tal que:
(i) $\langle Tf, g\rangle = \langle f, T^*g\rangle$;
(ii) $\|T\| = \|T^*\|$;
(iii) $(T^*)^* = T$.
El operador T^* recibe el nombre de *adjunto* de T. Si $T = T^*$ se dice que T es autoadjunto.

Sugerencia: Usar el teorema de representación de Riesz.

19. Sea $-\infty \le a < b \le \infty$, y consideremos $L^2((a,b))$. Sea $K \in L^2((a,b)\times(a,b))$. Definimos en $L^2((a,b))$ el operador

$$Tf(x) = \int_a^b K(x,t)f(t)dt.$$

(i) Demostrar que T es acotado en $L^2((a,b))$.

(ii) Calcular el operador adjunto.

(iii) Determinar qué condición debe satisfacer K para que T sea autoadjunto.