HOJA 3 DE PROBLEMAS

Espacios L^p. Sea (X, χ, μ) un espacio de medida, con μ medida positiva. Usaremos la siguiente notación: $\mathrm{L}^p = \mathrm{L}^p(X, \mu) = \mathrm{L}^p(X, \chi, \mu)$ y cuando $0 < p < +\infty$

$$\|f\|_p = \|f\|_{\mathrm{L}^p} = \|f\|_{\mathrm{L}^p(X,\chi,\mu)} = \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

mientras, cuando $p = +\infty$:

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty = \|f\|_{\mathrm{L}^\infty} = \|f\|_{\mathrm{L}^\infty(X,\chi,\mu)} &= \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| \\ \text{(recuerdo que)} &= \text{ínf} \left\{ M \geq 0 \;\middle|\; \mu\big(\{x \in X \mid |f(x)| > M\}\big) = 0 \right\} \end{aligned}$$

Finalmente, ponemos para todo $E \in \chi$

$$⨍_E f \mathrm{d}\mu = \int_E f \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu(E)} \,.$$

Recuerdo que $\| \cdot \|_p$ es una norma en L^p cuando $p \geq 1$, mientras es una casi norma cuando $0 < p < 1$. En todo caso, L^p con $p > 0$ es un espacio métrico con respecto a la distancia $\mathrm{d}_p(f, g) = \|f - g\|_p$. L^p es un espacio de Banach (normado y completo) si $p \in [1, +\infty]$.

Desigualdades integrales.

1. Recuerdo la Desigualdad de Jensen: Sea $\varphi : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$, y sea $f : X \to \mathbb{R}$ μ-medible. Si $\mu(X) < +\infty$ y $f \in \mathrm{L}^1$. Entonces, la parte negativa $[\varphi(f)]_- \in \mathrm{L}^1$ y es cierta la siguiente desigualdad:
$$\varphi \left(⨍_X f \mathrm{d}\mu \right) \leq ⨍_X \varphi(f) \mathrm{d}\mu \,.$$
Probar que si φ es estrictamente convexa, se obtiene igualdad en la desigualdad de Jensen si y solo si f es constante.

2. Usar la desigualdad de Jensen para probar las siguientes desigualdades:

   a) *Desigualdad entre media aritmética y geométrica:* para todo $1 \leq n \in \mathbb{N}$ y todo $x_i \in [0, +\infty)$
   $$\big(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n\big)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

   b) *Desigualdad entre media aritmética y geométrica generalizada:* para todo $1 \leq n \in \mathbb{N}$ y todo $\alpha_i, x_i \in [0, +\infty)$ con $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$ se tiene que
   $$x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$$

3. Probar la desigualdad de Hölder como consecuencia de la desigualdad de Jensen.

4. Probar que la desigualdad de Hölder $\int |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$, con $p' = \frac{p}{p-1}$, es una igualdad si y sólo si $|f|^p = \lambda |g|^{p'}$ c.t.p. para alguna constante $\lambda > 0$.

5. Probar por inducción las siguientes generalizaciones de la desigualdad de Hölder:

   a) Dados $1 < p_1, p_2, \dots, p_n < \infty$ con $f_i \in \mathrm{L}^{p_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, se cumple

   $$\left|\int_X f_1\, f_2\, \dots f_n\, d\mu\right| \leq \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2}\dots\|f_n\|_{p_n}\,, \qquad \text{cuando } \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}=1\,.$$

   b) Dados $p, q, r \in [1, \infty]$, probar que se cumple

   $$\|fg\|_q \leq \|f\|_p\|g\|_r\,, \qquad \text{cuando } \frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}\,.$$

6. Sean p y $p' = p/(p-1)$ exponentes conjugados con $1 \leq p < \infty$. Si $f \in \mathrm{L}^p(X, \mu)$, demostrar que

   $$\|f\|_p = \text{máx}\left\{\left|\int_X f\,\bar{g}\,d\mu\right| : \|g\|_{p'} = 1\right\}$$

   (Indicación: para demostrar $\geq$ usar la desigualdad de Hölder; para probar $\leq$ tomar $g_0(x) = |f(x)|^{p-2}f(x)/\|f\|_p^{p-1}$ cuando sea posible y $g_0(x) = 0$ si $f(x) = 0$.)

7. (*Desigualdad integral de Minkowski*) Sean $(X,\ \mu)$ e $(Y,\ \nu)$ dos espacios de medida y sea $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ una función medible. Si $1 \leq p \leq \infty$, $f(\cdot\,, y) \in \mathrm{L}^p(X, \mu)$ c.t. $y \in Y$ y la función $y \to \|f(\cdot\,, y)\|_p$ pertenece a $\mathrm{L}^1(Y, \nu)$, demostrar que se cumple:

   $$\left\|\int_Y f(\cdot, y)\, d\nu(y)\right\|_{\mathrm{L}^p(X,\,\mu)} \leq \int_Y \|f(\cdot, y)\|_{\mathrm{L}^p(X,\,\mu)}\, d\nu(y)\,.$$

   (Nota: esta desigualdad se puede leer de la siguiente manera: la norma de una integral es menor o igual que la integral de las normas)

   (Indicación: usar el ejercicio anterior y la desigualdad de Hölder)

8. *Interpolación de espacios* L^p. Demostrar que si $p_0 < r < p_1$, y $f \in \mathrm{L}^{p_0}(\Omega, \mu) \cap \mathrm{L}^{p_1}(\Omega, \mu)$, entonces $f \in \mathrm{L}^r(\Omega, \mu)$ y se tiene la desigualdad

   $$\|f\|_r \;\leq\; \|f\|_{p_0}^{1-\vartheta}\,\|f\|_{p_1}^{\vartheta}\,, \quad \text{donde } \vartheta \in (0,1) \text{ queda definido por } \frac{1}{r}=\frac{1-\vartheta}{p_0}+\frac{\vartheta}{p_1}.$$

9. Sea $\mu(X) = 1$ y f y g dos funciones positivas y medibles con $f(x)g(x) \geq 1$ c.t.p.. Usar la desigualdad de Hölder para probar

   $$1 \leq \left(\int_X f\,\mathrm{d}\mu\right)\left(\int_X g\,\mathrm{d}\mu\right)\,.$$

10. Probar que si $\mu(X) < \infty$, y $0 < p \leq q \leq \infty$, se tiene que $\mathrm{L}^q(X, \mu) \subset \mathrm{L}^p(X, \mu)$, como consecuencia de la desigualdad:

    $$\frac{\|f\|_p}{\mu(X)^{\frac{1}{p}}} = \left(\fint_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\fint_X |f|^q \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \frac{\|f\|_q}{\mu(X)^{\frac{1}{q}}}$$

11. Demostrar con un ejemplo que si $0 < p < q \leq \infty$ y $X = B_r(0) \subset \mathbb{R}^N$ con la medida de Lebesgue , la inclusion $\mathrm{L}^q(X, \mu) \subset \mathrm{L}^p(X, \mu)$, es estricta.

12. Probar que si $\mu(X) < \infty$, tenemos que

    $$\lim_{p\to+\infty} \frac{\|f\|_p}{\mu(x)^{\frac{1}{p}}} = \lim_{p\to+\infty}\left(\fint_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty$$

    ¿es cierto el resultado cuando $\mu(X) = +\infty$?

13. Probar que si $\mu(X) = 1$, tenemos que:

   a) *Limite de $\|\cdot\|_p^p$ cuando p va a cero.* (con supp se entiende el soporte esencial de f.)

$$\lim_{p\to 0^+} \|f\|_p^p = \lim_{p\to 0^+} \int_X |f|^p \mathrm{d}\mu = \mu(\mathrm{supp}(f)) = \mu\left(\{x \in X \,\Big|\, f(x) \neq 0\}\right)$$

   b) *Limite de $\|\cdot\|_p$ cuando p va a cero.*

$$\lim_{p\to 0^+} \|f\|_p = \lim_{p\to 0^+} \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \exp\left(\int_X \log|f| \mathrm{d}\mu\right)$$

   c) Probar la variación de los limites de arriba cuando $\mu(X) < \infty$.

14. *Desigualdad de Hölder al reves cuando $p \in (0,1)$.* Probar que, si $0 < p < 1$ y $p' = p/(p-1) < 0$, y $f, g \geq 0$, se tiene la desigualdad:

$$\int_X f\, g\, \mathrm{d}\mu \geq \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f|^{p'} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X \frac{\mathrm{d}\mu}{|f|^{\frac{p}{1-p}}}\right)^{-\frac{1-p}{p}}$$

15. a) Encontrar un espacio de medida (X, μ) y una función $f \in \bigcap_{p<r<\infty} \mathrm{L}^r \setminus \mathrm{L}^p$.
    b) Encontrar un espacio de medida (X, μ) y una función $f \in \bigcap_{0<r<p} \mathrm{L}^r \setminus \mathrm{L}^p$.

    Indicación: intentar con funciones de la forma $f(x) = x^{-1/p}$ en espacios de medida apropiados.

16. a) Encontrar un espacio de medida (X, μ) y una función $f \in \mathrm{L}^p \setminus \bigcup_{p<r<\infty} \mathrm{L}^r$.
    b) Encontrar un espacio de medida (X, μ) y una función $f \in \mathrm{L}^p \setminus \bigcup_{0<r<p} \mathrm{L}^r$.

    Indicación: intentar con funciones de la forma $f(x) = x^{-1/p}\,|\log x|^{-2/p}$ en espacios de medida apropiados.

17. Usar la desigualdad de Hölder para probar:

$$\int_0^\pi x^{-1/3} \operatorname{sen} x\, dx < 3\,.$$

Convergencia en L^p

18. Sean $1 \leq p, p' \leq \infty$ exponentes conjugados, $p' = p/(p-1)$. Si $f_n \to f$ en la norma de L^p y $g_n \to g$ en la norma de L^q, demostrar que $f_n\, g_n \to f\, g$ en la norma de L^1.

19. En $[0,1)$ se consideran los intervalos diádicos $I_{j,k} = [\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k})$ con $j = 1, 2, \ldots 2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Si $f \in L^p((0,1))$, $1 \leq p < \infty$, y

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{2^k} \left(\fint_{I_{j,k}} f(y)\, dy\right) \mathbb{1}_{I_{j,k}}(x)\,,$$

    demostrar:

    a) $\|f_k\|_p \leq \|f\|_p$.
    b) Si $f \in C_c((0,1))$, $\|f - f_k\|_p \to 0$ cuando $k \to \infty$.
    c) Si $f \in L^p((0,1))$, $\|f - f_k\|_p \to 0$ cuando $k \to \infty$.
       (Usar que $C_c((0,1))$ es denso en $L^p((0,1))$).

20. Encontrar $f, f_n \in L^p([0,1])$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $1 \le p < \infty$ tales que

   a) $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

   b) $\{f_n(x)\}_n$ es una sucesión no convergente para todo $x \in [0,1]$.

21. *a*) Demostrar que si $u \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, entonces $\sum\limits_{k \in Z} u(x-k)$ converge en $\mathrm{L}^1((0,1))$.

   ¿Es cierto el mismo resultado en $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$?

   b) Demostrar que si $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, entonces $\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N} u(x-k)$ converge a 0 en $\mathrm{L}^2((0,1))$.

   ¿Es cierto el mismo resultado en $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$?

22. Sea $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   (i) $\mathbb{X}$ es completo;

   (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ implica $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en $\mathbb{X}$.

23. Considerar $\mathrm{L}^2((0,1))$, pero dotado de la norma $\|\cdot\|_1$. ¿Es completo el espacio resultante?

Espacios de sucesiones

Cuando $X = \mathbb{N}$ y μ es la medida de contar $\mu(n) = 1$, definimos $\ell^p(\mathbb{N}) = \ell^p := \mathrm{L}^p(X, \mu)$.

24. *a*) Sea $p \in [1, \infty)$. Se puede caracterizar ℓ^p de la siguiente manera:

$$\ell^p := \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} : \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p} < \infty\}$$

   Comprobar que ℓ^p con la norma $\|\{a_n\}\|_{\ell^p} = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p}$ es un espacio de Banach.

   b) Cuando $p = +\infty$, se define

$$\ell^\infty := \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} : \sup_n |a_n| < \infty\}$$

   Comprobar que ℓ^∞ dotado de la norma $\|\{a_n\}\|_{\ell^\infty} = \sup\limits_n |a_n|$ es un espacio de Banach.

25. Si $p \in [1, \infty)$, demostrar que para todo $a, b \ge 0$ se tiene $(a+b)^p \ge a^p + b^p$.

26. Si denotamos por e_j la sucesión de ℓ^p que vale 1 en la j-ésima entrada y 0 en el resto, demostrar que para todo $s = \{s_j\} \in \ell^p$ se tiene $\sum_{j=1}^{\infty} s_j\, e_j = s$ en norma ℓ^p. ¿Es cierto el resultado en ℓ^∞?

27. Deducir que, si $p \in [1, \infty)$, entonces $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^p \ge \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$.

28. Si $1 \le p_1 < p_2 \le \infty$, demostrar que $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$ y $\|\{a_n\}\|_{\ell^{p_2}} \le \|\{a_n\}\|_{\ell^{p_1}}$.

29. Demostrar con un ejemplo que $\ell^p \setminus (\cup_{r<p} \ell^r) \ne \emptyset$.

30. Sea $c_0(\mathbb{N})$ el espacio de sucesiones $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Demostrar que si $0 < p < \infty$ se cumple que $\ell^p(\mathbb{N})$ es un subespacio denso de $c_0(\mathbb{N})$, dotado éste con la norma $\|\ \|_\infty$.

31. Supongamos que $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales positivos con la propiedad de que

$$\sup\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n : \|b\|_2 = 1\} = S < \infty$$

Demostrar que $a \in \ell^2$ y $\|a\|_2 = S$.

Más avanzados

32. Sea c_0 el conjunto de las sucesiones de números complejos $\{\xi_k\}$ tales que $\lim \xi_k = 0$, dotado de la topología de la norma del supremo. Demostrar que $(c_0)^* = l^1$.

33. Probar que $(\ell^\infty)^* \neq \ell^1$.

34. Probar que $L^p(\mathbb{R}^N)$ y ℓ^p, $1 \leq p < \infty$, son separables.

35. Probar que ℓ^∞ no es separable. ¿Es separable $L^\infty(\mathbb{R})$?

    Sugerencia: el conjunto $\mathcal{E} = \{(a_k) : a_k = 0 \text{ ó } 1\}$ es no numerable y cumple $\|a - b\|_{\ell^\infty} = 1$, $\forall\, a \neq b \in \mathcal{E}$.