HOJA 2 DE PROBLEMAS

Medidas con signo y Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodim.

1. Sea μ una medida con signo sobre el espacio medible (X, χ). Recuerdo que la *Variación Total* de una medida es $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$, siendo $\mu_\pm$ la parte positiva y negativa de una medida, dadas por la descomposición de Jordan. Decimos que μ es finita (o sigma-finita), si y solo si $|\mu|$ lo es.

   a) Probar la siguiente caracterización de la variación total:
   $$|\mu|(E) = \sup\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_i)| \;\middle|\; E_n \text{ es una partición de X} \right\}$$
   y también que
   $$\mu_+(E) = \sup\left\{ \mu(F) \;\middle|\; F \subseteq E\,,\, F \in \chi \right\}\,, \quad \mu_-(E) = -\inf\left\{ \mu(F) \;\middle|\; F \subseteq E\,,\, F \in \chi \right\}\,.$$
   Verificar que $\mu = \mu_+ - \mu_-$ y que $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$.

   b) Probar que $|\mu|$ es la medida minimal tal que $-|\mu| \leq \mu \leq |\mu|$

   c) Probar que $E \in \chi$ es μ-nulo si y solo si es $|\mu|$-nulo.

   d) Probar que $|\mu_1 + \mu_2| \leq |\mu_1| + |\mu_2|$

   e) Probar que μ es finita si y solo si μ_+ y μ_- lo son (como medidas positivas)

   f) Sean μ_1, μ_2 medidas con signo, probar que
   $$\mu_1 \perp \mu_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu_1 \perp |\mu_2| \quad \Longleftrightarrow \quad \mu_1 \perp \mu_{2,+} \quad \Longleftrightarrow \quad \mu_1 \perp \mu_{2,-}\,.$$

2. Sea μ una medida con signo sobre el espacio medible (X, χ). Podemos definir la integral de una función respecto a μ como
   $$\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu_+ - \int_X f \mathrm{d}\mu_-$$
   y definimos L^1 como el espacio de (las clases de) funciones μ-integrables (respecto a la equivalencia en casi todo punto). Probar que

   a) $\mathrm{L}^1(X, \chi, \mu) = \mathrm{L}^1(X, \chi, |\mu|)$

   b) Si $f \in \mathrm{L}^1(X, \chi, \mu)$, $\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_X |f| \,\mathrm{d}|\mu|$.

   c) Si $E \in \chi$, tenemos la siguiente *caracterización funcional de la variación total*:
   $$|\mu|(E) = \sup\left\{ \left|\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right| \;\middle|\; |f(x)| \leq 1 \right\}$$

3. Sea $\nu(E) = \int_E f \,\mathrm{d}\mu$ para todo $E \in \chi$, donde μ es una medida positiva. Describir la descomposición de Hahn de la medida ν; describir además la variación positiva μ_+, la negativa μ_- y la total $|\mu|$.

4. Probar que la medida de Lebesgue sobre una recta de $\mathbb{R}^2$ es singular (singular continua, en realidad) respecto a la medida de Lebesgue en todo $\mathbb{R}^2$

5. Probar que la medida de Dirac δ_{x_0} en un punto $x_0 \in \mathbb{R}^N$ es singular respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$.

6. Sea $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [-\infty, +\infty]$ una medida con signo sobre la sigma algebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Definimos la función $x \mapsto \mu([0, x])$. Probar que

   a) μ es una medida continua si y solo si $x \mapsto \mu([0, x])$ es una función continua

   b) μ es una medida absolutamente continua si y solo si $x \mapsto \mu([0, x])$ es una función absolutamente continua

   Recuerdo que una medida es continua si cada punto mide cero, es decir $\mu(\{x\}) = 0 \,\forall\, x \in X$
   Recuerdo que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *absolutamente continua* si y solo si

   $$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \qquad \text{tal que} \qquad \sum_{i=1}^{k} |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon\,,$$

   para cualquier familia de intervalos disjuntos $[x_1, y_1]\,, \ldots\,, [x_n, y_n]$, tales que

   $$\sum_{i=1}^{k} |f(y_i) - f(x_i)| < \delta\,.$$

7. La familia de funciones absolutamente continuas, es la familia mas grande de funciones para que el Teorema Fundamental del calculo es cierto (usando la derivada clásica y la integral de Lebesgue). Construir un ejemplo de función $f : [0, 1] \to [0, 1]$, continua pero no absolutamente continua, creciente, y con derivada cero en casi todo punto. La mas conocida es la función de Cantor-Vitali (escalera del diablo).

   Función Maximal y Teoría de diferenciación de Lebesgue.

8. Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$, $f \not\equiv 0$, probar que:

   a) Existen $c, R > 0$ tales que la función maximal $Mf(x) \geq c\,|x|^{-N}$, para $|x| > R$.

   b) Como consecuencia, cuando $t > 0$ es pequeño, existe $c' > 0$ tal que

   $$\mathrm{m}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; Mf(x) \geq t\right\}\right) \geq \frac{c'}{t}\,,$$

   (eso nos dice que la estimación del Teorema Maximal es optimal.)

   c) Probar que (en general) es falsa la desigualdad

   $$\|Mf\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)}\,.$$

   (eso nos dice que el operador Maximal $M : \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N) \to \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ no es acotado.)
   (indicación: describir la función maximal de $f(x) = \mathbb{1}_{(-1,1)}(x)$.)

9. A partir del teorema Maximal y usando la desigualdad de Jensen probar que si $p \in [1, \infty)$ existe $C < \infty$ tal que para toda $f \in L^p(\mathbb{R})$ y para todo $\lambda > 0$ se cumple que

   $$|\{x \in \mathbb{R} : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^p\, dy\,, \tag{(p)}$$

   donde M es la función maximal de Hardy-Littlewood.

10. *Variante de la función Maximal de Hardy-Littlewood:* definimos

    $$M^*f(x) = \sup\left\{\frac{1}{\mathrm{m}(B)}\int_B |f(x)|\,\mathrm{d}x \;\middle|\; B \text{ es una bola y } x \in B\right\}$$

    probar que $Mf \leq M^*f \leq 2^N Mf$ en casi todo punto.

11. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \to \mathbb{C}$ medible. Se llama **función de distribución** de f a la función $\sigma_f : (0, \infty) \to [0, \infty)$ definida por

$$\sigma_f(\lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) .$$

   a) Describir y dibujar la función de distribución de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f = 5\chi_{(-3,-2)} + 2\chi_{(0,2)} - 3\chi_{(4,7)}$$

   b) Demostrar que $\|f\|_{L^1(X,\mu)} = \|\sigma_f\|_{L^1(0,\infty)}$.

12. Probar que el operador Maximal es acotado de L^p en L^p, cuando $1 < p \leq +\infty$: es decir, $M : \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^N) \to \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^N)$ y existe $C_p > 0$ tal que para toda $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^N)$ tenemos:

$$\|Mf\|_{\mathrm{L}^p} \leq C_p \|f\|_{\mathrm{L}^p} .$$

   (indicación: usar la desigualdad (p) y la función de distribución)
   ¿Es cierto el resultado para $p = 1$?

13. Probar el siguiente Teorema que relaciona la derivada de Radon-Nikodim con el Teorema de Diferenciación de Lebesgue.
   Teorema. Sea μ una medida de Borel Regular y sea $d\mu = d\mu_S + d\mu_{AC} = d\mu_S + f dm$, entonces para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu(E_r)}{m(E_r)} = f(x)$$

   Para toda familia $\{E_r\}_{r>0}$, que tiende suavemente (shrinks nicely at) $\{x\}$.

14. Probar que si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ y es continua en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces $x_0 \in L_f$, es decir, cada punto de continuidad es un punto de Lebesgue.