HOJA 6 DE PROBLEMAS

Transformada de Fourier

1. Para una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se define la traslación por $y \in \mathbb{R}^n$ como $(T_y f)(x) = f(x-y)$, la modulación por $z \in \mathbb{R}^n$ como $(M_z f)(x) = e^{2\pi i x\cdot z} f(x)$ y la dilatación por una matriz de orden n no singular A como $(D_A f)(x) = f(Ax)$. Demostrar las siguientes identidades:

   (a) $\widehat{(T_y f)}(\xi) = (M_{-y}\hat{f})(\xi)$;

   (b) $\widehat{(M_z f)}(\xi) = (T_z\hat{f})(\xi)$;

   (c) $\widehat{(D_A f)}(\xi) = \frac{1}{|\det A|}(D_{(A^{-1})^t}\hat{f})(\xi)$.

2. (a) Sea f tal que $\hat{f}(\xi) = \pi e^{-2\pi|\xi|}$, $\xi \in \mathbb{R}$. Demostrar que $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Si $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, demostrar que $(f * f * f)(x) = 3\pi^2 \frac{1}{9+x^2}$.

   (c) Si $g(x) = e^{10\pi i x}\frac{1}{9+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, demostrar que $\hat{g}(\xi) = \frac{\pi}{3}e^{-6\pi|\xi-5|}$, $\xi \in \mathbb{R}$.

3. (i) Calcular la transformada de Fourier de la función $u(x) = \text{máx}\{1-|x|, 0\}$.

   (ii) Demostrar que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\text{sen}^4 x}{x^4}\,dx = \frac{2}{3}\pi.$

4. Calcular la transformada de Fourier de $u_t(x) = e^{-2\pi t|x|}$, $t > 0$ y demostrar que, para $s, t > 0$ se tiene:

   (i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{t}{\pi}\frac{\cos 2\pi x y}{y^2+t^2}\,dy = e^{-2\pi t|x|}$, (iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{(y^2+t^2)(y^2+s^2)} = \frac{\pi}{st(s+t)}$,

   (ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{(y^2+t^2)^2} = \frac{\pi}{2t^2}$, (iv) $\displaystyle\left(\frac{t}{\pi}\frac{1}{y^2+t^2}\right) * \left(\frac{s}{\pi}\frac{1}{y^2+s^2}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{t+s}{y^2+(t+s)^2}$.

5. Sean $f(x) = \chi_{[-1/2,1/2]}(x)$ y $g(x) = (1-|x|)\chi_{[-1,1]}(x)$. Demostrar que

$$\hat{f}\,(\xi) = \frac{\text{sen}\,\pi\xi}{\pi\xi} \qquad \text{y} \qquad \hat{g}\,(\xi) = \left(\frac{\text{sen}\,\pi\xi}{\pi\xi}\right)^2.$$

6. Si $\lambda > 0$ y $x \in \mathbb{R}$, calcular

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\text{sen}(\lambda t)}{t}\, e^{itx}\,dt.$$

   Sugerencia: Escribir $\text{sen}(\lambda t)/t$ como transformada de Fourier de una función característica, usar Fubini, y después pasar al límite. En el último paso quizás necesites usar $\int_0^\infty (\text{sen}\,x)/x\,dx = \pi/2$.

7. El siguiente ejercicio ilustra la relación entre decaimiento de $\widehat{f}$ y suavidad de f.

   (i) Probar que si $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ entonces $\hat{f}(\xi) = o(1/(1+|\xi|)^k)$ cuando $|\xi| \to \infty$.

   (ii) Probar que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\widehat{f}(\xi) = O(1/|\xi|^{1+\alpha})$ cuando $|\xi| \to \infty$ (para algún $0 < \alpha < 1$), entonces f es igual a.e. a una función de Hölder de orden α.

   Sugerencia: En (ii) usar la fórmula de inversión para escribir $f(x+h) - f(x)$ como una integral y estimar separadamente en los términos $\int_{|\xi|\le 1}$, $\int_{1<|\xi|\le 1/|h|}$ y $\int_{|\xi|>1/|h|}$ usando $|e^{i\theta}-1| \le \text{mín}\{|\theta|, 2\}$.

8. Demostrar que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\mathrm{supp}(\hat{f}) \subset B_R(0)$, entonces $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y además

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|D^\alpha f(x)\right| \leq (2\pi R)^{|\alpha|} \, \|\hat{f}\|_1.$$

9. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\mathrm{supp}(\hat{f}) \subset B_R(0)$.

   (i) Probar que existen funciones $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tales que $f = f * \phi$.

   (ii) Probar que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$ y además se tiene

   $$\|f\|_p \leq c_p \, R^{n/p'} \, \|f\|_1,$$

   para alguna constante $c_p > 0$.

   Sugerencia: Escribir $\hat{f} = \hat{f}\hat{\phi}$, donde $\hat{\phi} \in C_c^\infty$ vale 1 en la bola de radio R.

10. Sean f y g tales que $|f(x)|, |g(x)| \leq C/(1+|x|)^{n+\alpha}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$. Demostrar que $|(f*g)(x)| \leq C'/(1+|x|)^{n+\alpha}$.

    Indicación. Dividir la integral que define $f * g(x)$ en dos trozos correspondientes a $|y| \leq |x|/2$ e $|y| > |x|/2$.

11. Demostrar la *desigualdad de Heisenberg*: si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces

    $$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{4\pi} \, \|f\|_2^2.$$

    Para f real, probar que se tiene igualdad si y sólo si $f(x) = ae^{-bx^2}$, con $a \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

    Sugerencia: Integrando por partes, escribir $\int |f(x)|^2 dx = -\int x(|f(x)|^2)' dx$, y después utilizar Cauchy-Schwarz y Plancherel.

12. (**Teorema de inmersión de Sobolev**) Para $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, sea $H^\alpha(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1+|\xi|^\alpha)\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ el **espacio de Sobolev** de orden α. Demostrar que si $f \in H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ con $\alpha > n/2$, entonces $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$.

    Indicación. Demostrar que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Más avanzados

13. (i) Sea $u \in L^1(\mathbb{R})$. Demostrar que la serie $\sum_{k\in\mathbf{Z}} u(x-k)$ converge en $L^1((-1/2, 1/2))$ hacia una función v cuyos coeficientes de Fourier (respecto de la base correspondiente al intervalo $[-1/2, 1/2]$) son $\hat{u}(k)$.

    (ii) Supongamos que u es continua y satisface las estimaciones

    $$|u(x)| \leq C(1+|x|^2)^{-1}, \quad |\hat{u}(x)| \leq C(1+|x|^2)^{-1} \, \forall x \in \mathbb{R}.$$

    Demostrar que se verifica la *fórmula de sumación de Poisson*

    $$\sum_{k\in\mathbb{Z}} u(x-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}(k) e^{2\pi ikx},$$

    donde las series convergen absoluta y uniformemente sobre cada intervalo acotado de $\mathbb{R}$.

14. Sea $\mathcal{F}_R(t) = R\left(\frac{\operatorname{sen}\pi tR}{\pi tR}\right)^2$ si $t \neq 0$ y $\mathcal{F}_R(0) = R$ el núcleo de Fejér en la recta real.

    (a) Demostrar que si $f \in C_0(\mathbb{R})$, entonces $f * \mathcal{F}_R$ converge uniformemente a f cuando $R \to \infty$.

(b) Demostrar que si $f \in L^p(\mathbb{R})$, entonces $f * \mathcal{F}_R$ converge a f en la norma de $L^p(\mathbb{R})$ cuando $R \to \infty$.

Indicación. Usar la función g del ejercicio 3 para demostrar que $\{\mathcal{F}_R\}_{R>0}$ es una familia de núcleos de sumabilidad cuando $R \to \infty$.

15. Sea $G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, el núcleo de Gauss en $\mathbb{R}$. Demostrar que $D_0(G_t) = \sqrt{t}$ y $D_0(\widehat{G_t}) = \frac{1}{4\pi\sqrt{t}}$, donde $D_0(f)$ es la dispersión de $f \in L^2(\mathbb{R})$ alrededor de $x = 0$, es decir $D_0(f) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} / \|f\|_2$.

   Indicación. Usar que $\left(\widehat{e^{-\pi x^2}}\right)(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$.

16. Sean A_n y V_n el área y el volumen de la esfera unidad y de la bola unidad en $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Usar el cambio a coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$, es decir, $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_0^\infty \left(\int_{S^n} f(r\gamma)\, r^{n-1}\, d\sigma(\gamma)\right) dr$ para probar que $A_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ y $V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$, donde $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$.

   Indicación. Usar que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2}\, dx = 1$.

17. (a) Sea $T > 0$. Probar que existe $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\psi * f = f$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $\operatorname{supp}(\hat{f}) \subset [-T, T]$.
    (b) Probar que no existe $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\psi * f = f$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$.

18. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ una función acotada. Se define su **transformada de Laplace** como

$$\mathcal{L}f(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-tz}\, dt, \quad z > 0.$$

   (i) Demostrar que $\mathcal{L}f$ es de clase C^∞ en $(0, \infty)$ y $\lim_{z\to\infty} \mathcal{L}f(z) = 0$.

   (ii) Demuestra las siguientes fórmulas (dando condiciones apropiadas)

$$\mathcal{L}\big[f(at)\big](z) = a^{-1}\mathcal{L}f(z/a), \quad \mathcal{L}[f'](z) = z\mathcal{L}f(z) - f(0), \text{ y } \mathcal{L}(f * g)(z) = [\mathcal{L}f(z)][\mathcal{L}g(z)].$$

   (iii) Encuentra una fórmula en términos de $\mathcal{L}f$ para las expresiones

$$\mathcal{L}[tf(t)](z), \quad \mathcal{L}[f''](z), \quad \mathcal{L}\Big[\int_0^t f(s) ds\Big], \text{ y } \int_s^\infty \mathcal{L}f(z)\, dz.$$

   (iv) La definición de $\mathcal{L}f(z)$ se puede extender como una función holomorfa en $\Re z > 0$. Llamando $z = a + ib$, escribe $\mathcal{L}f(z)$ como una transformada de Fourier y encuentra formalmente una fórmula de inversión para la transformada de Laplace.