HOJA 5 DE PROBLEMAS

Series de Fourier

1. Hallar la serie de Fourier de las siguientes funciones:

   (i) $f(x) = \frac{(\pi-x)^2}{4}$ en $0 \leq x < 2\pi$;

   (ii) $g(x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi\alpha} e^{i(\pi-x)\alpha}$ en $0 \leq x < 2\pi$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$;

   (iii) $h(x) = x(\pi - x)$ en $[0, \pi]$ extendida de manera impar a $[-\pi, 0]$.

   Solución. (i) $f(x) \sim \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{2n^2} e^{inx} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$; (ii) $g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n+\alpha} e^{inx}$; (iii) $h(x) \sim \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2k+1)x)}{(2k+1)^3}$.

2. Utilizar la identidad de Parseval y los resultados del ejercicio 1 para probar

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$; (ii) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi\alpha)}$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$;

   (iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$; (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

3. Calcular las series de Fourier de las funciones $f_1(x) = \operatorname{sen}(2x)\cos(x)$ y $f_2(x) = e^x$. En ambos casos las funciones se definen en $[0, 2\pi)$ y se consideran 2π-periódicas.

4. Se considera la función $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$ si $|x| > \delta$, $f(x) = 1 - \frac{|x|}{\delta}$ si $|x| \leq \delta$. Dibujar la gráfica de f y demostrar que $f(x) = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(n\delta)}{\pi n^2 \delta} \cos(nx)$.

5. Utilizar el ejercicio 4 y la identidad de Parseval para demostrar que

$$\text{(i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}; \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

6. Sea f la función definida en $[-\pi, \pi)$ mediante $f(x) = |x|$.

   (i) Calcular los coeficientes de Fourier de f y demostrar que $\widehat{f}(0) = \frac{\pi}{2}$ y $\widehat{f}(n) = \frac{-1+(-1)^n}{\pi n^2}$ si $n \neq 0$.

   (ii) ¿Cuál es la serie de Fourier de f en términos de senos y cosenos?

   (iii) Tomando $x = 0$, demostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

7. Dado un número $\alpha \notin \mathbb{Z}$: (i) demuestra (justificando el tipo de convergencia) que

$$e^{-i\alpha x} = c_\alpha \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^k}{k+\alpha} e^{ikx}, \quad |x| < \pi,$$

   para una constante c_α apropiada. ¿Qué ocurre cuando $x = \pi$?

   (ii) Utiliza Parseval para probar el siguiente desarrollo en fracciones simples

$$\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi\alpha)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\alpha+k)^2}.$$

8. Probar que $\widehat{(f * g)}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$ para toda $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Deducir que si P es un polinomio trigonométrico, entonces también lo es $P * f$ para toda $f \in L^1(\mathbb{T})$.

9. Sea $k = 1, 2, 3, \ldots$ y supongamos que $f \in L^1(\mathbb{T})$ es tal que $|\widehat{f}(0)| \leq C$ y $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{C}{|n|^{k+1}}$ para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Demostrar que $f \in C^{k-1}(\mathbb{T})$.

10. Demostrar que si f es 2π-periódica y de clase $C^k(\mathbb{R})$, entonces $\hat{f}(n) = o(1/|n|^k)$, para $|n| \to \infty$. (*Sugerencia*: Utiliza integración por partes y el lema de Riemann-Lebesgue.)

11. Demuestra que si f es creciente y acotada en $[-\pi, \pi)$, entonces $\hat{f}(k) = O(1/|k|)$, para $|k| \to \infty$. Mostrar con un ejemplo que este decaimiento no se puede mejorar a $o(1/|k|)$.

12. (i) Demostrar que la integral impropia $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ es convergente mayorándola por una serie alternada.
    (ii) Demostrar que $\int_0^\infty \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx = \infty$.
    (iii) Demostrar que $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$ integrando $e^{-xy} \operatorname{sen} x$ con respecto a x y con respecto a y (esto es un ejercicio de cálculo de integrales dobles).

13. Sea $f(x) = -\log|2 \operatorname{sen}(x/2)|$ en $(0, 2\pi)$.
    (i) Dibujar su gráfica y demostrar que $f \in L^1(\mathbb{T})$.
    (ii) Demostrar que la serie de Fourier de f es $\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos nx}{n}$.
    (iii) Con $x = \pi$ en el apartado anterior deducir la fórmula $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$

14. (*Desigualdad de Poincaré-Wirtinger*). Sea u una función $2\pi-$periódica, $u \in C^1([-\pi, \pi])$. Si $\widehat{u}(0) = 0$, demostrar que se tiene la estimación (óptima) $\|u\|_2 \leq \|u'\|_2$.

15. (*Desigualdad de Sobolev*). Sea u una función $2\pi-$periódica, $u \in C^1([-\pi, \pi])$. Si $\widehat{u}(0) = 0$, demostrar que se tiene la estimación (óptima) $\|u\|_\infty \leq \sqrt{\frac{\pi}{6}}\|u'\|_2$.

Más avanzados

16. Sean u, v funciones 2π-periódicas, $u \in C^1([-\pi, \pi])$, $v \in L^2([-\pi, \pi])$. Si $\widehat{v}(0) = 0$, demostrar que se tiene la estimación (óptima) $\left|\int_{-\pi}^{\pi} u(t)v(t)\, dt\right| \leq C_2\|u'\|_2\|v\|_2$.

17. (i) Demuestra que si $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge en el sentido de Cesàro a s y además se tiene $a_n = o(1/n)$, entonces la serie converge en el sentido usual y $\sum_{n=1}^\infty a_n = s$. (ii) Deduce que si f es continua y periódica, y además $\hat{f}(k) = o(1/|k|)$ para $|k| \to \infty$, entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente en todo punto.

    Sugerencia: En (i), prueba que la resta de sumas parciales $S_n - \sigma_n = [(n-1)a_n + (n-2)a_{n-1} + \ldots + a_2]/n$.

18. Sea F_N el N-ésimo núcleo de Fejér: $F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k(x)$, donde D_N es el N-ésimo núcleo de Dirichlet.
    (i) Calcular los coeficientes de Fourier de F_N.
    (ii) Probar que para todo $j \in \mathbb{Z}$, $\lim_{N\to\infty} \widehat{F_N}(j) = 1$.
    (iii) Probar que $\lim_{N\to\infty} \|F_N\|_2 = \infty$.
    (iv) Calcular $\lim_{N\to\infty} \frac{\|F_N\|_2}{\|D_N\|_2}$.

19. **Principio de localización de Riemann.** Si $f,\, g \in L^1([-\pi,\pi]$, y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in (-\delta,\delta) \subset [-\pi,\pi]$, entonces, $S_n f(x) - S_n g(x) \to 0$, cuando $n \to \infty$, uniformemente en $[-\delta',\delta']$, para todo $\delta' < \delta$.

Indicación. Si $x \in [-\delta',\delta']$, y $h = f - g$,

$$S_n h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta-\delta'<|t|\leq\pi} h(x-t) \frac{\operatorname{sen}\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{\operatorname{sen}(t/2)}\, dt.$$

Para la convergencia uniforme, usar que si $x_1,\, x_2 \in [-\delta',\delta']$,

$$S_n h(x_1) - S_n h(x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta-\delta'<|t|\leq\pi} \big(h(x_1-t) - h(x_2-t)\big) \frac{\operatorname{sen}\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{\operatorname{sen}(t/2)}\, dt.$$

20. **Principio del máximo.** Sea f real y continua en la circunferencia unidad y $u(r,\theta)$ la solución de la ecuación de Laplace en el disco con valor de frontera f.

    (i) Probar que $\text{mín}\, f \leq u(r,\theta) \leq \text{máx}\, f$, para todo (r,θ).

    (ii) Probar que si $u(r_1,\theta_1) = \text{máx}\, f$ para algún (r_1,θ_1) en el interior del disco, entonces $u \equiv f \equiv Cte$.

21. Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números complejos. Sea $B_k = \sum_{n=1}^{k} b_n$ y $B_0 = 0$.

    (i) Demostrar la fórmula de sumación por partes:

    $$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n.$$

    (ii) Deducir el **criterio de Abel** sobre convergencia de series: si las sumas parciales de las serie $\sum_n b_n$ están acotadas y $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de números reales tal que $\text{lím}_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\sum_n a_n b_n$ converge.

22. (i) Demostrar la fórmula $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx = \frac{\cos(x/2) - \cos((n+1/2)x)}{2\operatorname{sen}(x/2)}$.

    (ii) Utilizar la fórmula del apartado anterior para demostrar que la expresión $\big|\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx\big|$ está acotada, independientemente de n, para todo $x \in \mathbb{R}$.

    (iii) Demostrar que $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\operatorname{sen}\big((n+\frac{1}{2})x\big)}{2\operatorname{sen}(x/2)}$ y usarlo para probar que la expresión $\big|\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx\big|$ está acotada, independientemente de n, para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2k\pi$.

23. Sea $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ la función característica del intervalo $[a,b] \subset [-\pi,\pi]$.

    (i) Demostrar que la serie de Fourier de f es $\frac{b-a}{2\pi} + \sum_{n\neq 0} \frac{e^{-ina} - e^{-inb}}{2\pi i n}\, e^{inx}$.

    (ii) Usar el criterio de Abel (ejercicio 14) y el ejercicio 15 para demostrar que la serie de Fourier de f converge en todo punto.