

HOJA 4 DE PROBLEMAS

Espacios de Hilbert

1. Algunos espacios pre-Hilbertianos.

- La expresión $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)} dx$ define un producto escalar en $C([0, 1])$. Demostrar que $C([0, 1])$ con este producto escalar **no** es un espacio de Hilbert.
- La expresión $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)} dx$ define un producto escalar en $C_c(\mathbb{R})$. Demostrar que $C_c(\mathbb{R})$ con este producto escalar **no** es un espacio de Hilbert.
- ¿Sabes identificar el cierre de los espacios anteriores por la topología dada por la norma inducida el producto escalar allí definido?

2. Demostrar que en un espacio pre-Hilbert $(\mathbb{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ si $\|x\| = \|y\| = 1$ y $x \neq y$, se cumple $\|x + y\| < 2$. (Indicación: usar la regla del paralelogramo.)

3. Probar que la igualdad $|\langle f, g \rangle| = \|f\|\|g\|$ sólo se da cuando $f = cg$ para algún escalar $c \in \mathbb{C}$ (o bien si f ó g son idénticamente cero).

Sugerencia: Suponer primero $\langle f, g \rangle = \|f\| = \|g\| = 1$, y en este caso probar que $\|f - g\| = 0$.

4. Demostrar que en un espacio pre-Hilbert se cumple la **identidad de polarización**:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2].$$

5. Si $(\mathbb{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio pre-Hilbert, demostrar que para todo $x \in \mathbb{H}$ se cumple

$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x, y \rangle|.$$

6. a) Demostrar que la norma $\|f\|_{\infty}$ definida en $L^{\infty}([0, 1])$ no puede provenir de un producto escalar.

b) Demostrar que $L^2([0, 1])$ es el único espacio de Hilbert de entre todos los espacios $L^p([0, 1])$, $0 < p < \infty$.

(Indicación: probar que no se cumple la ley del paralelogramo)

7. Sea $U : E_1 \rightarrow E_2$ una isometría lineal entre dos espacios de Hilbert, es decir

$$\|U(x) - U(y)\|_{E_2} = \|x - y\|_{E_1}, \quad \forall x, y \in E_1.$$

Probar que U es un *operador unitario*, es decir, $\langle U(x), U(y) \rangle_{E_2} = \langle x, y \rangle_{E_1}$, $\forall x, y \in E$.

8. Sean A, B convexos completos de un espacio pre-hilbertiano E , tales que $\|x\| \leq M$, $\forall x \in A$. Probar que existen $a \in A$, $b \in B$ tales que

$$\|a - b\| = d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\|.$$

9. Sea $(\mathbb{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert.

- Si $E \subset \mathbb{H}$, demostrar que E^{\perp} es un subespacio vectorial cerrado de \mathbb{H} .
- Si M es un subespacio vectorial cerrado de \mathbb{H} , demostrar que $(M^{\perp})^{\perp} = M$.

- c) Sea $\mathcal{U} = \{u_\alpha\}_\alpha$ un sistema ortonormal **no** finito. Demostrar que \mathcal{U} es un conjunto cerrado y acotado, pero no compacto.
- d) Si $x_0 \in \mathbb{H}$ y M es un subespacio vectorial cerrado de \mathbb{H} , demostrar que

$$\min \{\|x_0 - x\| : x \in M\} = \max \{|\langle x_0, y \rangle| : y \in M^\perp, \|y\| = 1\}.$$

10. Sea X un espacio pre-hilbertiano. Demostrar que para $u \neq 0, v \neq 0$ se tiene:

$$\left\| \frac{u}{\|u\|^2} - \frac{v}{\|v\|^2} \right\| = \frac{\|u - v\|}{\|u\| \|v\|}.$$

A partir de la expresión anterior, deducir las desigualdades

$$\begin{aligned} \|f\| \|g - h\| &\leq \|h\| \|g - f\| + \|g\| \|f - h\|, \\ \|f - e\| \|g - h\| &\leq \|h - e\| \|g - f\| + \|g - e\| \|f - h\|. \end{aligned}$$

11. Demostrar que el conjunto

$$\mathcal{U} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sen nx}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n=1}^\infty$$

es una base ortonormal de $L^2([-\pi, \pi])$.

(Indicación: usar que $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2([-\pi, \pi])$).

12. Demostrar que cada uno de los conjuntos

$$\mathcal{U}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx \right\}_{n=1}^\infty \quad \text{y} \quad \mathcal{U}_2 = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sen nx \right\}_{n=1}^\infty$$

es una base ortonormal de $L^2([0, \pi])$. (Indicación: como en el ejercicio anterior.)

13. Sea f una función continua y periódica de período 2π .

a) Dado α irracional, probar que para todo x

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x + \pi n \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f.$$

(Indicación: probarlo primero para $f(t) = e^{ikt}$.)

b) Probar que si α es racional, la igualdad no se cumple en general.

14. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert y $\{x_n\}_{n=1, \dots, N} \subset \mathcal{H}$ un sistema ortonormal. Probar que

$$\min_{(c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{R}^N} \left\| x - \sum_{n=1}^N c_n x_n \right\| = \left\| x - \sum_{n=1}^N \langle x, x_n \rangle x_n \right\|.$$

15. Demostrar el **teorema de Weierstrass**: toda función continua f sobre un intervalo $[a, b]$, puede ser aproximada uniformemente por polinomios. (Indicación: suponer primero que f es periódica de período 2π y aproximarla por polinomios trigonométricos. Usar a continuación que $e^{ikx} = \sum_{n=1}^\infty \frac{(ikx)^n}{n!}$ y que la convergencia es uniforme sobre compactos.)

16. Sea $T_n(x)$ el polinomio de Chebyshev de grado n , es decir,

$$T_0(x) = 1, \quad T_n(x) = 2^{1-n} \cos(n \arccos x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

a) Demostrar que $T_n(x)$ es un polinomio de grado n .

- b) Demostrar que $\{T_n\}_{n=0}^\infty$ es un sistema ortogonal de $L^2([-1, 1])$ con el producto escalar dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

- c) Demostrar que $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ es una base ortonormal de $L^2([-1, 1])$, donde

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \phi_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{2\pi}} T_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

17. Los polinomios de Legendre se definen mediante

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- a) Demostrar que $\{P_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ forman un sistema ortogonal de $L^2([-1, 1])$. (Indicación: usar integración por partes para probar $\int_{-1}^1 P_n(x) x^m dx = 0$ si $n > m$)
 b) Demostrar que

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = \int_{-1}^1 (1-x)^n (1+x)^n dx = \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n)! (2n+1)}$$

usando integración por partes.

- c) Usar los apartados anteriores para demostrar que $\{\sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ forman un sistema ortonormal de $L^2([-1, 1])$.

Más avanzados:

18. Sea H un espacio de Hilbert y $T : H \rightarrow H$ un operador lineal acotado. Demostrar que existe un único operador lineal acotado $T^* : H \rightarrow H$ tal que:

- (i) $\langle Tf, g \rangle = \langle f, T^*g \rangle$;
- (ii) $\|T\| = \|T^*\|$;
- (iii) $(T^*)^* = T$.

El operador T^* recibe el nombre de *adjunto* de T . Si $T = T^*$ se dice que T es autoadjunto.

Sugerencia: Usar el teorema de representación de Riesz.

19. Sea $-\infty < a < b < \infty$, y consideremos $L^2((a, b))$. Sea $K \in L^2((a, b) \times (a, b))$. Definimos en $L^2((a, b))$ el operador

$$Tf(x) = \int_a^b K(x, t) f(t) dt.$$

- (i) Demostrar que T es acotado en $L^2((a, b))$.
- (ii) Calcular el operador adjunto.
- (iii) Determinar qué condición debe satisfacer K para que T sea autoadjunto.