

HOJA 3 DE PROBLEMAS

Espacios L^p . Sea (X, χ, μ) un espacio de medida, con μ medida positiva. Usaremos la siguiente notación: $L^p = L^p(X, \mu) = L^p(X, \chi, \mu)$ y cuando $0 < p < +\infty$

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p(X, \chi, \mu)} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

mientras, cuando $p = +\infty$:

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty} = \|f\|_{L^\infty(X, \chi, \mu)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|$$

(recuerdo que) $= \inf \left\{ M \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > M\}) = 0 \right\}$

Finalmente, ponemos para todo $E \in \chi$

$$\int_E f d\mu = \int_E f \frac{d\mu}{\mu(E)}.$$

Recuerdo que $\|\cdot\|_p$ es una norma en L^p cuando $p \geq 1$, mientras es una casi norma cuando $0 < p < 1$. En todo caso, L^p con $p > 0$ es un espacio métrico con respecto a la distancia $d_p(f, g) = \|f - g\|_p$. L^p es un espacio de Banach (normado y completo) si $p \in [1, +\infty]$.

Desigualdades integrales.

1. Recuerdo la Desigualdad de Jensen: Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$, y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μ -medible. Si $\mu(X) < +\infty$ y $f \in L^1$. Entonces, la parte negativa $[\varphi(f)]_- \in L^1$ y es cierta la siguiente desigualdad:

$$\varphi \left(\int_X f d\mu \right) \leq \int_X \varphi(f) d\mu.$$

Probar que si φ es estrictamente convexa, se obtiene igualdad en la desigualdad de Jensen si y solo si f es constante.

2. Usar la desigualdad de Jensen para probar las siguientes desigualdades:

a) *Desigualdad entre media aritmética y geométrica:* para todo $1 \leq n \in \mathbb{N}$ y todo $x_i \in [0, +\infty)$

$$(x_1 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

b) *Desigualdad entre media aritmética y geométrica generalizada:* para todo $1 \leq n \in \mathbb{N}$ y todo $\alpha_i, x_i \in [0, +\infty)$ con $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ se tiene que

$$x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

3. Probar la desigualdad de Hölder como consecuencia de la desigualdad de Jensen.
4. Probar que la desigualdad de Hölder $\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$, con $p' = \frac{p}{p-1}$, es una igualdad si y sólo si $|f|^p = \lambda |g|^{p'}$ c.t.p. para alguna constante $\lambda > 0$.

5. Probar por inducción las siguientes generalizaciones de la desigualdad de Hölder:

a) Dados $1 < p_1, p_2, \dots, p_n < \infty$ con $f_i \in L^{p_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, se cumple

$$\left| \int_X f_1 f_2 \dots f_n d\mu \right| \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \dots \|f_n\|_{p_n}, \quad \text{cuando } \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1.$$

b) Dados $p, q, r \in [1, \infty]$, probar que se cumple

$$\|fg\|_q \leq \|f\|_p \|g\|_r, \quad \text{cuando } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}.$$

6. Sean p y $p' = p/(p-1)$ exponentes conjugados con $1 \leq p < \infty$. Si $f \in L^p(X, \mu)$, demostrar que

$$\|f\|_p = \max \left\{ \left| \int_X f \bar{g} d\mu \right| : \|g\|_{p'} = 1 \right\}$$

(Indicación: para demostrar \geq usar la desigualdad de Hölder; para probar \leq tomar $g_0(x) = |f(x)|^{p-2} f(x) / \|f\|_p^{p-1}$ cuando sea posible y $g_0(x) = 0$ si $f(x) = 0$.)

7. (*Desigualdad integral de Minkowski*) Sean (X, μ) e (Y, ν) dos espacios de medida y sea $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ una función medible. Si $1 \leq p \leq \infty$, $f(\cdot, y) \in L^p(X, \mu)$ c.t. $y \in Y$ y la función $y \rightarrow \|f(\cdot, y)\|_p$ pertenece a $L^1(Y, \nu)$, demostrar que se cumple:

$$\left\| \int_Y f(\cdot, y) d\nu(y) \right\|_{L^p(X, \mu)} \leq \int_Y \|f(\cdot, y)\|_{L^p(X, \mu)} d\nu(y).$$

(NOTA: esta desigualdad se puede leer de la siguiente manera: la norma de una integral es menor o igual que la integral de las normas)

(Indicación: usar el ejercicio anterior y la desigualdad de Hölder)

8. *Interpolación de espacios L^p* . Demostrar que si $p_0 < r < p_1$, y $f \in L^{p_0}(\Omega, \mu) \cap L^{p_1}(\Omega, \mu)$, entonces $f \in L^r(\Omega, \mu)$ y se tiene la desigualdad

$$\|f\|_r \leq \|f\|_{p_0}^{1-\vartheta} \|f\|_{p_1}^{\vartheta}, \quad \text{donde } \vartheta \in (0, 1) \text{ queda definido por } \frac{1}{r} = \frac{1-\vartheta}{p_0} + \frac{\vartheta}{p_1}.$$

9. Sea $\mu(X) = 1$ y f y g dos funciones positivas y medibles con $f(x)g(x) \geq 1$ c.t.p.. Usar la desigualdad de Hölder para probar

$$1 \leq \left(\int_X f d\mu \right) \left(\int_X g d\mu \right).$$

10. Probar que si $\mu(X) < \infty$, y $0 < p \leq q \leq \infty$, se tiene que $L^q(X, \mu) \subset L^p(X, \mu)$, como consecuencia de la desigualdad:

$$\frac{\|f\|_p}{\mu(X)^{\frac{1}{p}}} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \frac{\|f\|_q}{\mu(X)^{\frac{1}{q}}}$$

11. Demostrar con un ejemplo que si $0 < p < q \leq \infty$ y $X = B_r(0) \subset \mathbb{R}^N$ con la medida de Lebesgue, la inclusión $L^q(X, \mu) \subset L^p(X, \mu)$, es estricta.

12. Probar que si $\mu(X) < \infty$, tenemos que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|f\|_p}{\mu(X)^{\frac{1}{p}}} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty$$

¿es cierto el resultado cuando $\mu(X) = +\infty$?

13. Probar que si $\mu(X) = 1$, tenemos que:

a) Limite de $\|\cdot\|_p^p$ cuando p va a cero. (con supp se entiende el soporte esencial de f .)

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} \|f\|_p^p = \lim_{p \rightarrow 0^+} \int_X |f|^p d\mu = \mu(\text{supp}(f)) = \mu(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\})$$

b) Limite de $\|\cdot\|_p$ cuando p va a cero.

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} \|f\|_p = \lim_{p \rightarrow 0^+} \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \exp \left(\int_X \log |f| d\mu \right)$$

c) Probar la variación de los limites de arriba cuando $\mu(X) < \infty$.

14. Desigualdad de Hölder al revés cuando $p \in (0, 1)$. Probar que, si $0 < p < 1$ y $p' = p/(p-1) < 0$, y $f, g \geq 0$, se tiene la desigualdad:

$$\int_X f g d\mu \geq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f|^{p'} d\mu \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X \frac{d\mu}{|f|^{\frac{p}{1-p}}} \right)^{-\frac{1-p}{p}}$$

15. a) Encontrar un espacio de medida (X, μ) y una función $f \in \bigcap_{p < r < \infty} L^r \setminus L^p$.

b) Encontrar un espacio de medida (X, μ) y una función $f \in \bigcap_{0 < r < p} L^r \setminus L^p$.

Indicación: intentar con funciones de la forma $f(x) = x^{-1/p}$ en espacios de medida apropiados.

16. a) Encontrar un espacio de medida (X, μ) y una función $f \in L^p \setminus \bigcup_{p < r < \infty} L^r$.

b) Encontrar un espacio de medida (X, μ) y una función $f \in L^p \setminus \bigcup_{0 < r < p} L^r$.

Indicación: intentar con funciones de la forma $f(x) = x^{-1/p} |\log x|^{-2/p}$ en espacios de medida apropiados.

17. Usar la desigualdad de Hölder para probar:

$$\int_0^\pi x^{-1/3} \text{sen } x dx < 3.$$

Convergencia en L^p

18. Sean $1 \leq p, p' \leq \infty$ exponentes conjugados, $p' = p/(p-1)$. Si $f_n \rightarrow f$ en la norma de L^p y $g_n \rightarrow g$ en la norma de L^q , demostrar que $f_n g_n \rightarrow f g$ en la norma de L^1 .

19. En $[0, 1)$ se consideran los intervalos diádicos $I_{j,k} = [\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k})$ con $j = 1, 2, \dots, 2^k, k \in \mathbb{N}$. Si $f \in L^p((0, 1))$, $1 \leq p < \infty$, y

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{2^k} \left(\int_{I_{j,k}} f(y) dy \right) \mathbb{1}_{I_{j,k}}(x),$$

demostrar:

a) $\|f_k\|_p \leq \|f\|_p$.

b) Si $f \in C_c((0, 1))$, $\|f - f_k\|_p \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

c) Si $f \in L^p((0, 1))$, $\|f - f_k\|_p \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

(Usar que $C_c((0, 1))$ es denso en $L^p((0, 1))$).

20. Encontrar $f, f_n \in L^p([0, 1])$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $1 \leq p < \infty$ tales que
- $\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.
 - $\{f_n(x)\}_n$ es una sucesión no convergente para todo $x \in [0, 1]$.
21. a) Demostrar que si $u \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\sum_{k \in \mathbb{Z}} u(x - k)$ converge en $L^1((0, 1))$.
¿Es cierto el mismo resultado en $L^2(\mathbb{R})$?
- b) Demostrar que si $u \in L^2(\mathbb{R})$, entonces $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^N u(x - k)$ converge a 0 en $L^2((0, 1))$.
¿Es cierto el mismo resultado en $L^1(\mathbb{R})$?
22. Sea $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
- \mathbb{X} es completo;
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ implica $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en \mathbb{X} .
23. Considerar $L^2((0, 1))$, pero dotado de la norma $\|\cdot\|_1$. ¿Es completo el espacio resultante?

Espacios de sucesiones

Cuando $X = \mathbb{N}$ y μ es la medida de contar $\mu(n) = 1$, definimos $\ell^p(\mathbb{N}) = \ell^p := L^p(X, \mu)$.

24. a) Sea $p \in [1, \infty)$. Se puede caracterizar ℓ^p de la siguiente manera:

$$\ell^p := \left\{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} : \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

Comprobar que ℓ^p con la norma $\|\{a_n\}\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}$ es un espacio de Banach.

- b) Cuando $p = +\infty$, se define

$$\ell^{\infty} := \left\{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} : \sup_n |a_n| < \infty \right\}$$

Comprobar que ℓ^{∞} dotado de la norma $\|\{a_n\}\|_{\ell^{\infty}} = \sup_n |a_n|$ es un espacio de Banach.

25. Si $p \in [1, \infty)$, demostrar que para todo $a, b \geq 0$ se tiene $(a + b)^p \geq a^p + b^p$.
26. Si denotamos por e_j la sucesión de ℓ^p que vale 1 en la j -ésima entrada y 0 en el resto, demostrar que para todo $s = \{s_j\} \in \ell^p$ se tiene $\sum_{j=1}^{\infty} s_j e_j = s$ en norma ℓ^p . ¿Es cierto el resultado en ℓ^{∞} ?
27. Deducir que, si $p \in [1, \infty)$, entonces $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)^p \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$.
28. Si $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$, demostrar que $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$ y $\|\{a_n\}\|_{\ell^{p_2}} \leq \|\{a_n\}\|_{\ell^{p_1}}$.
29. Demostrar con un ejemplo que $\ell^p \setminus (\cup_{r < p} \ell^r) \neq \emptyset$.
30. Sea $c_0(\mathbb{N})$ el espacio de sucesiones $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$. Demostrar que si $0 < p < \infty$ se cumple que $\ell^p(\mathbb{N})$ es un subespacio denso de $c_0(\mathbb{N})$, dotado éste con la norma $\|\cdot\|_{\infty}$.
31. Supongamos que $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales positivos con la propiedad de que

$$\sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n : \|b\|_2 = 1 \right\} = S < \infty$$

Demostrar que $a \in \ell^2$ y $\|a\|_2 = S$.

Más avanzados

32. Sea c_0 el conjunto de las sucesiones de números complejos $\{\xi_k\}$ tales que $\lim \xi_k = 0$, dotado de la topología de la norma del supremo. Demostrar que $(c_0)^* = l^1$.
33. Probar que $(\ell^\infty)^* \neq \ell^1$.
34. Probar que $L^p(\mathbb{R}^N)$ y ℓ^p , $1 \leq p < \infty$, son separables.
35. Probar que ℓ^∞ no es separable. ¿Es separable $L^\infty(\mathbb{R})$?

Sugerencia: el conjunto $\mathcal{E} = \{(a_k) : a_k = 0 \text{ ó } 1\}$ es no numerable y cumple $\|a - b\|_{\ell^\infty} = 1$, $\forall a \neq b \in \mathcal{E}$.