VARIABLE REAL. 4º DE MATEMÁTICAS *Curso* 2014/15

HOJA 1 DE PROBLEMAS

1. Sea (X, χ, μ) un espacio de medida.

   a) Demostrar que $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ es medible $\Longleftrightarrow \{x \in \Omega \,:\, f(x) > r\}$ es medible $\forall r$.

   b) Demostrar que si $f_n : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, ...$, son medibles también los son las funciones $\sup_n f_n$, $\text{ínf}_n f_n$, $\text{lím sup}_n f_n$ y $\text{lím inf}_n f_n$.

   c) Demostrar que si $f_n : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, ...$, son medibles y $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ puntualmente, entonces f es medible.

2. Probar que si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ es continua y $f(x) = 0$ a.e. con respecto a la medida de Lebesgue entonces $f(x) = 0\ \forall x$.

3. Sea $\{f_n : n = 1, 2, \ldots\}$ una sucesión de funciones medibles con $f_n \geq 0$. Usar el teorema de la convergencia monótona para demostrar

$$\int_\Omega (\sum_{n=1}^{\infty} f_n)\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu\,.$$

4. Consideramos las siguientes sucesiones de funciones $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(1)\ f_n = \frac{\mathbb{1}_{(0,n)}}{n}\,, \qquad (2)\ f_n = \mathbb{1}_{(n,n+1)}\,, \qquad (3)\ f_n = n\mathbb{1}_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}\,, \qquad (4)\ f_n = \mathbb{1}_{\left[\frac{j}{2^k},\frac{j+1}{2^k}\right]}\,,$$

   y en la (4) ponemos $0 \leq j \leq 2^{k-1}$ y $n = j + 2^k$.

   a) Probar que (1) converge a cero uniformemente, (2) converge a cero puntualmente (en todo punto), y (3) converge a cero en casi todo punto. Probar que, por otra parte que todas ellas no convergen a cero en L^1 (es decir, $\int_\mathbb{R} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x \not\to 0$ cuando $n \to +\infty$).

   b) Probar que (4) converge a cero en L^1 , pero no es convergente (oscila) para $x \in [0, 1]$. (Sugerencia: probar que para casi todo $x \in [0, 1]$ hay infinitos n para los cuales $f_n(x) = 0$, y también infinitos n para los cuales $f_n(x) = 1$)

   c) Probar que (1),(3) y (4) convergen a cero en medida, y que (2) no es de Cauchy en medida.

5. Probar la siguiente generalización de la *Desigualdad de Markov.* Sea $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ una función medible y creciente en la imagen de $f : (X, \chi, \mu) \to \mathbb{R}$ probar que

$$\mu\left(\left\{x \in X \;\middle|\; f(x) > t\right\}\right) \leq \frac{1}{g(t)} \int_X g(f(x))\mathrm{d}\mu(x)$$

   Como consecuencia, probar que si $f_n \to f$ en L^1, entonces $f_n \to f$ en medida.

6. *Caracterizaciones de la convergencia en medida.* Sea (X, χ, μ) un espacio de medida y sucesión $f_n : X \to \mathbb{R}$ decimos que $f_n \to f$ en medida cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mu\left(\left\{x \in X \;\middle|\; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\right\}\right) \to 0 \qquad \text{cuando } n \to +\infty \qquad .$$

   a) Probar que $f_n \to f$ en medida si y solo si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad \mu\left(\left\{x \in X \;\middle|\; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\right\}\right) < \varepsilon\,, \quad \forall\, n > N_\varepsilon\,.$$

b) Supongamos que $\mu(X) < +\infty$. Probar que $f_n \to f$ en medida si y solo si

$$d(f_n, f) = \int_X \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} \mathrm{d}\mu \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad n \to +\infty$$

Probar que $d(\cdot, \cdot)$ es una distancia sobre el espacio de las funciones μ-medibles.

7. *Teorema de Egorov version "dominada".* Recuerdo el teorema de Egorov: sea (X, χ, μ) un espacio de medida con $\mu(X) < +\infty$ y sea $f_n : X \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones medibles que converge en casi todo punto a f, entonces

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in X \quad \text{tal que} \quad \mu(N_\varepsilon) < \varepsilon \quad \text{y} \quad f_n \to f \text{ uniformemente en } X \setminus N_\varepsilon .$$

Esta convergencia se llama *casi uniforme.*
Reemplazar la hipótesis $\mu(X) < +\infty$ con la hipótesis (de "dominación") $|f_n| \le g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con g absolutamente integrable.

8. Probar que si $f_n \to f$ casi uniformemente, entonces $f_n \to f$ en medida.
(como consecuencia, si $f_n \to f$ en casi todo punto, entonces $f_n \to f$ en medida.)

9. Demostrar que si $f_n \to f$ en medida entonces existe una subsucesión de $\{f_n\}$ que converge a f en casi todo punto.
Indicación: Elegir $n_1 < n_2 < ... < n_l < ...$ tal que si $E_l = \left\{x : |f_{n_l} - f| > \frac{1}{2^l}\right\}$ se tiene $\mu(E_l) < \frac{1}{2^l}$, y probar

$$\left\{x : \limsup_{l\to\infty} |f_{n_l}(x) - f(x)| > 0\right\} \subset \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{j=l}^{\infty} E_j .$$

10. Probar las siguientes versiones del Lema de Fatou y del Teorema de convergencia dominada de Lebesgue: sea (X, χ, μ) un espacio de medida, y sean $f_n, f, g : X \to \mathbb{R}$.
   a) Si $f_n \ge 0$ y $f_n \to f$ en medida, entonces $\int_X f \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$
   b) Si $|f_n| \le g$, con g absolutamente μ-integrable, y $f_n \to f$ en medida, entonces $\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$ y también $\int_X |f_n - f| \mathrm{d}\mu \to 0$.

11. Probar que la desigualdad del Lema de Fatou puede ser estricta.
Indicación: Considera (X, χ, μ) con $\mu(X) < \infty$, $E \in \chi$, con $0 < \mu(E) < \mu(X)$ y definir $f_n = \chi_E$, si n es impar y $f_n = \chi_{X\setminus E}$ si n es par.

12. Probar la siguiente desigualdad numérica:
para todo $p > 0$ y $\varepsilon > 0$ existe una constante $C_{\varepsilon,p} > 0$ tal que

$$||a + b|^p - |b|^p| \le \varepsilon |b|^p + C_{\varepsilon,p} |a|^p \qquad \text{para todo } a, b \in \mathbb{C}.$$

13. Teorema Sea (X, χ, μ) un espacio de medida, y sean $f_n, f : X \to \mathbb{C}$. Si $f_n \to f$ en casi todo punto y existe una constante $K > 0$ tal que $\int_X f_n \mathrm{d}\mu \le K < \infty$. Probar que entonces

$$\int_X f_n \mathrm{d}\mu \to \int_X f \mathrm{d}\mu \qquad \text{si y solo si} \qquad \int_X |f_n - f| \mathrm{d}\mu \to 0$$

(es otra manera de ver el Teorema de Brezis y Lieb, "el termino que falta en Fatou")
Encontrar dos contraejemplos:
   a) cuando $f_n \to f$ c.t.p. pero falla la hipótesis de acotación uniforme $\int_X f_n \mathrm{d}\mu \le K < \infty$.
   b) cuando vale la acotación uniforme $\int_X f_n \mathrm{d}\mu \le K < \infty$ pero $f_n \not\to f$ en c.t.p.

14. Calcular los límites, cuando $n \to \infty$, de :

$$(a) \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}\, dx , \qquad (b) \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\, dx , \qquad (c) \int_0^n \left(1 - \frac{x}{2n}\right)^n e^{x}\, dx .$$