Temario del curso

Tema 0. Repaso de la teoría básica de la medida e integración

Referencias: Un resumen bien escrito está en Cap. 1.1 de [8]. Para una presentación más detallada (con pruebas) véase [9] o también Cap. 1,2 de [4], Cap. 1,2 de [7], Cap. 3,4,5,6 de [10], Cap 3,4 (1variable) y 11-12 (n-variables) de [6], o bien Cap 1 de [5] (mas avanzado).

1. 8septiembre2014. Introducción al curso. Empezamos con el Tema 0: (esencialmente todo está resumido en Cap 1.1 de [8])

   - Los tres principios de Littlewood.
   - Espacios de medida y funciones medibles: σ-Algebras, medidas, funciones medibles según Borel y Lebesgue). Propiedades básicas de medidas: monotonía, sub-aditividad, convergencia monótona y dominada para conjuntos.
   - Integración. Definición de la integral para funciones simples, no-negativas, reales y complejas. Propiedades básicas de la integral: linealidad, desigualdad triangular, comparación, modificación en conjuntos nulos, f integrable es finita c.t.p.
   - Medidas producto y Teoremas de Fubini y Tonelli.
   - Teorema de Vitali sobre la continuidad absoluta de la integral (prueba: ejercicio).

2. 10septiembre2014. Seguimos con el Tema 0

   - Integración en coordenadas polares en $\mathbb{R}^N$ ([4] Cap. 2.7)
   - Teoremas de convergencia: Convergencia Monotona (Beppo Levi) también para series, Lema de Fatou, Convergencia Dominada (Lebesgue) también para series. Teoremas de Egorov y Lusin. ([8] Cap. 1.1. Teor. Lusin: [4] ej. 44 pg. 61, y/o Teor. 2.24 [7], pg. 55)
   - Algunos ejemplos y generalizaciones. ([6] Cap. 11.4, pg. 268)

Tema 1 Complementos de teoría de la medida e integración

REFERENCIAS: Seguimos (en gran parte) el Cap. 1.2 de [8] y Cap 3 de [4]. También probamos un teorema de [5] (mas avanzado).

3. 15septiembre2014. Tema 1. Complementos de teoría de la medida e integración.
   - Teorema de Brezis-Lieb: "el termino que falta en el Lema de Fatou" (demostración completa en clase, [5] Teor. 1.9)
   - Modos de convergencia para sucesiones de funciones ([4] Cap. 2.4):
     - convergencia puntual, en casi todo punto (c.t.p.)
     - convergencia uniforme, casi uniforme (Egorov) y esencialmente uniforme (L^∞)
     - convergencia en medida y convergencia integral (L^1 o L^p).
   - Relaciones entre las varias convergencias: teoría, comentarios, y unos ejemplos concretos.
4. 17septiembre2014. Seguimos Modos de convergencia ([4] Cap. 2.4)
   - Relaciones entre las varias convergencias: teoría y unos ejemplos concretos.
   - Mapa de las relaciones entre las diferentes convergencias
   - Desigualdades de Markov y Chebichev.
   - Convergencia en medida:
     - Caracterizaciones de convergencia en medida
     - compacidad secuencial de la convergencia en medida
     - versiones del Lema de Fatou y del Teorema de convergencia dominada con convergencia en medida (enunciados)
   - El teorema de Vitali de caracterización de convergencias integrales (en L^p, solo para $p = 1$, enunciado). ([11], pg.44)
5. 22septiembre2014. Medidas con signo. Cap. 1.2 de [8] y Cap. 3 de [4].
   - Ejercicio de caracterización de convergencia en medida (alumno a la pizarra)
   - Medidas con signo: Definición, y ejemplos fundamentales:
     - medida asociada a una función integrable
     - diferencia de dos medidas positivas.
     - Mas ejemplos y comentarios: delta de Dirac, [. . .].
6. 24septiembre2014. No ha habido clase: recuperarla.

7. 29octubre2014. Seguimos Medidas con signo. (Cap. 1.2 de [8] y Cap. 3 de [4])

   - Ejercicio: $f = g$ en c.t.p. ssi $m_f = m_g$, medidas asociadas a f, g (alumno a la pizarra)
   - El teorema de descomposición de Hahn (probado), unos ejemplos y comentarios.

8. 1octubre2014. Seguimos Medidas con signo. (Cap. 1.2 de [8] y Cap. 3 de [4])

   - Teorema de descomposición de Hahn (prueba acabada).
   - Teorema de las descomposición de Jordan.
   - Definicion de Medidas continuas, absolutamente continuas y singulares.
   - Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodim y sus 3 Corolarios: (enunciados, comentarios y ejemplos)
     - Cor. 1: Caracterización de medidas absolutamente continuas
     - Cor. 2: Teorema de descomposición de Lebesgue I
     - Cor. 3: Teorema de descomposición de Lebesgue II: medidas absolutamente continuas, singulares continuas (Cantoriana) y "pure point".

9. 6octubre2014. Acabamos medidas con signo. (Cap. 1.2 de [8] y Cap. 3 de [4])

   - Soporte de medidas, funciones definidas en c.t.p. y funciones continua. Ejemplos y comentarios.
   - Ejemplo concreto: la Delta de Dirac es singular respecto a la medida de Lebesgue.
   - Relación entre la definición de continuidad, continuidad uniforme y continuidad absoluta para funciones, y las medidas continuas y absolutamente continuas.
   - La clase de funciones absolutamente continua es la mas grande clase de funciones para las cuales vale el Teorema fundamental del calculo, con la derivada en sentido clásico y la integral de Lebesgue.

   Empezamos Teoria de Diferenciación de Lebesgue, Cap. 3.4 de [4].

   - Introducción a la derivación "a la Lebesgue"
   - Comparación entre concepto de derivada de Radon-Nikodim y derivación "a la Lebesgue".

10. 8octubre2014. Seguimos con la Teoria de Diferenciación de Lebesgue, Cap. 3.4 de [4].

    - Lema de recubrimiento (version simplificada del Lema de Wiener). (probado)
    - Definición de $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ y $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$.
    - Definición de $A_r f(x)$ (media en bolas) y de función Maximal de Hardy-Littlewood $Hf(x)$
    - Propiedad de continuidad de $A_r f(x)$. (probado)
    - El Teorema Maximal. (probado) Observaciones.
      (comentarios sobre $L \log L$, el Teorema de Stein.)
      Ejercicio: $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x)| \le \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^N} |Hf(x)| \le C \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x)|$
    - Teorema: $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, entonces $\lim_{r\to 0} A_r f(x) = f(x)$ en c.t.p.
      (prueba por acabar, falta ultimo paso)

11. 13octubre2014. Seguimos con la Teoria de Diferenciación de Lebesgue, Cap. 3.4 de [4].

    - Teorema: $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, entonces $\lim_{r\to 0} A_r f(x) = f(x)$ en c.t.p. (prueba completada)
    - Definición de conjunto de Lebesgue L_f
    - Teorema: $m(L_f^c) = 0$. (probado)
    - Teorema de Diferenciación de Lebesgue. (probado)
    - Definición de medidas de Borel regulares.
    - Teorema: Sea μ una medida de Borel regular y sea $\mathrm{d}\mu = f\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}\mu_s$ su descomposición de Lebesgue-Radon-Nikodim con respecto a la medida de Lebesgue m. Entonces $\lim_{r\to 0} \mu(B_r(x))/m(B_r(x)) = f(x)$.

12. 15octubre2014. Espacios L^p. (Cap. 1.3 de [8] y Cap. 4 de [4], y Cap 2 de [5])

    - Definición de espacios $\mathcal{L}^p(X,\chi,\mu)$ y de $\mathrm{L}^p(X,\chi,\mu)$ y sus normas, cuando $p \ge 1$.
    - Propiedades de espacio vectorial, espacio normado, métricas, y topológicas.
    - El caso de los espacios L^p con $p \in (0,1)$, propiedades métricas y casi-normas.
    - Unas desigualdades básicas y aplicaciones a propiedades métricas y topológicas de los espacios L^p

- El espacio L^∞ y el espacio C^0, el supremo esencial vs el supremo.

13. 20octubre2014. Espacios L^p. (Cap. 1.3 de [8] y Cap. 4 de [4], y Cap 2 de [5]). Desigualdades integrales

    - Repaso sobre funciones convexas. Hiperplano de soporte, sub-diferencial.
    - Desigualdad de Jensen (probada). Ejemplos y aplicaciones
    - Desigualdad de Hölder, probada con desigualdad de Young (numerica, dos formas). Desigualdad de Hölder generalizada.
    - Desigualdad de Minkowsky.

14. 22octubre2014. Espacios L^p. (Cap. 1.3 de [8] y Cap. 4 de [4], y Cap 2 de [5])

    - Aplicaciones de la desigualdad de Jensen: desigualdad de media geométrica y aritmética.
    - Ejemplos de funciones en los espacios L^p y $|x|^\alpha \notin \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
    - $\mathrm{L}^q \subseteq \mathrm{L}^p \cap \mathrm{L}^r$ cuando $0 < p \le q \le r \le +\infty$
    - Los espacios $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^N)$ y $\mathrm{L}^p(\Omega)$ con $\mu(\Omega) < +\infty$: similitudes y diferencias.
    - Limites de normas L^p cuando $p \to \infty$ y $p \to 0$.
    - Espacios L^p con $p < 0$, y ínfimo esencial (limite cuando $p \to -\infty$).

15. 27octubre2014. Espacios L^p. (Cap. 1.3 de [8] y Cap. 4 de [4], y Cap 2 de [5])

    - Teorema (Fisher-Riesz): Los espacios L^p con $p \ge 1$ son espacios de Banach. (probado).
    - Teorema abstracto: Un espacio normado es completo si y solo si la convergencia absoluta (en norma) de series, implica la convergencia condicional.
    - Teorema. Densidad de funciones simples de soporte compacto en L^p, $p \ge 1$
    - Teorema. Densidad de funciones continuas de soporte compacto en L^p, si $1 \le p < \infty$.
    - Los espacios L^∞, C^0_c y C^0_0.

16. 29octubre2014. Espacios L^p. (Cap. 1.3 de [8] y Cap. 4 de [4], y Cap 2 de [5])

    - Los espacios L^∞, C^0_c y C^0_0. (continuado, mas ejemplos y observaciones)
    - Teorema: Los espacios L^p con $p \in (0,1)$ son espacios métricos completos. (probarlo como ejercicio).
    - Dualidad: dual algebraico y topológico.
    - El dual de un espacio normado: relación con sus funcionales lineales y/o continuos, norma dual. Ejemplos y comentarios

- Lemma: continuidad de operadores lineales en espacios normados. Operadores acotados. (probado)
- El dual $L^{p'}$ de L^p, cuando $p \in (1, \infty)$.

17. 3noviembre2014. Espacios L^p (Cap. 1.3 de [8] y Cap. 4 de [4], y Cap 2 de [5] y Cap. IV de [1, 2])

    - Teorema de representación de Riesz para los espacios L^p (probado).
    - El dual $L^{p'}$ de L^p, cuando $p \in (1, \infty)$. Ejemplos.
    - Espacios reflexivos y uniformemente convexos (justo unos comentarios).
    - Los espacios duales de L^1 y L^∞. Ejemplo de funcional de L^∞ lineal y continuo que no se puede representar con funciones de L^1.
    - Lema/Corolario de aproximación de funciones L^p con funciones C_c^∞ (no probado) como introducción a la convolución.

18. 5noviembre2014. Convolución. (esencialmente Cap. IV.4 de [1, 2])

    - Convolución. Definición y propiedades básicas.
    - La convolución como operador lineal y continuo entre espacios L^p.
    - La desigualdad de Young. Version completa (no probada, con mejor constante y funciones explícitas que dan igualdad, cf. Cap 4.2 de [5]), y version standard (probada, como en Cap. IV.4 de [1, 2]).

19. 10noviembre2014. **FIESTA.**

20. 12noviembre2014. Convolución. (esencialmente Cap. IV.4 de [1, 2])

    - (Repaso) Soporte esencial de una función L^p.
    - Proposición: $\mathrm{supp}(f * g) \subseteq \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)$. (probada)
    - Los espacios C^0, C^k, C^∞ y C_c^0, C_c^k, C_c^∞.
    - Notación Multi-índice. La formula de Taylor en N-variables (no probada).
    - Proposición: si $f \in C_c^0(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, entonces $f * g \in C^0(\mathbb{R}^N)$. (probada)

21. 14noviembre2014. **VIERNES. FIESTA.**

22. 17noviembre2014. Convolución y Molificadores (Identidad Aproximada). (esencialmente Cap. IV.4 de [1, 2])

    - Proposición: si $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, entonces $f * g \in C^k(\mathbb{R}^N)$ y $\partial^\alpha(f * g) = (\partial^\alpha f) * g$. En particular si $f \in C_c^\infty$ entonces $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. (probada)

- Definición de Molificadores (Identidad Aproximada) ϱ_n. Observaciones, ejemplos y conexión con el Teorema de Diferenciación de Lebesgue.
- Ejemplo concreto de Identidad Aproximada (usando la función $\mathrm{e}^{\frac{-1}{1-|x|^2}}$)
- Proposición: Si $f \in C^0(\mathbb{R}^N)$, entonces $\varrho_n * f \to f$ uniformemente en los compactos de $\mathbb{R}^N$. (probada)
- Teorema de Leray-Friedrichs: Si $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^N)$, entonces $\varrho_n * f \to f$ en $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^N)$. Observaciones.

23. 19noviembre2014. Convolución y Molificadores (identidad aproximada). (esencialmente Cap. IV.4 de [1, 2])

    - Prueba del Teorema de Leray-Friedrichs.
    - Corolario: (Densidad de C_c^∞ en L^p) $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $\mathrm{L}^p(\Omega)$ cuando $1 \leq p < \infty$.
    - Corolario: (Teorema del test) Si $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ y $\int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}x = 0$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces $f = 0$ c.t.p.

24. 21noviembre2014. **Viernes. Recupero Clase+Clase de problemas**
    Espacios de Hilbert (seguimos Cap. 1.4 de [8], y algo de Cap. 5.5 de [4], y Cap 5 de [1, 2])

    - Definición de Espacios con producto interno o Pre-Hilbertianos. Formas bilineares y sesquilineares.
    - Propiedades básicas y estructura de espacio normado de espacios Pre-Hilbertianos.
    - Desigualdad de Cauchy-Schwarz (probada), Teorema de Pitagora (probado), Ley del Paralelogramo.
    - Conexión entre la uniforme convexidad de un espacio y las desigualdades de Hanner, como generalización de la ley del paralelogramo
    - Ejemplos "más conocidos" $\mathbb{R}^N, \mathbb{C}^N, L^2(X,\chi,\mu), \ell^2(\mathbb{N})$ y menos conocidos...

25. 24noviembre2014. Espacios de Hilbert (seguimos Cap. 1.4 de [8], y algo de Cap. 5.5 de [4], y Cap 5 de [1, 2])

    - Definición de Espacios de Hilbert.
    - Teorema: Distancia de un convexo cerrado (probado).
      (y algunas ideas sobre calculo de variaciones)
    - Teorema(corolario del anterior) de las proyecciones. Complementos ortogonales y sus propiedades.

- Teorema de representación de Riesz y sus consecuencias: reflexividad, espacios "pivot"
- Sistemas ortogonales SOG y Sistemas Ortonormales Completos SOC (Bases de Hilbert).
- Teorema de equivalencia de propiedades de SOG y SOC. (Isometria de H en $\ell^2(\mathbb{A})$, desigualdad de Bessel, identidad de Parseval, ...)

26. 26noviembre2014. Espacios de Hilbert y Series de Fourier (seguimos Cap. 1.4 de [8], y algo de Cap. 5.5 y 8 de [4])
    - Aproximación de funciones con Polinomios: un viejo problema.
    - Teorema(s) de Stone-Weierstrass (no probado) y aplicaciones a los polinomios trigonometricos.
    - Series de Fourier (SdF) en $\mathrm{L}^2(0,1) = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.
    - Teorema (Densidad de los polinomios trigonometricos en L^2). $\{\mathrm{e}^{2\pi\, i\, nt}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un SOC en $\mathrm{L}^2(0,1)$ (Idea de la demostración, con y sin el Teor. de Stone-Weierstrass)
27. 28noviembre2014. **Viernes. Examen Parcial.**
28. 1diciembre2014. Series de Fourier (algo de Cap. 8 de [4])
    - Propiedades básicas de las SdF: Teorema de Plancharel (identidad de Parseval y desigualdad de Bessel, Formula de inversión, y $\mathfrak{F} : L^2(0,1) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ es operador lineal,acotado y unitario.)
    - Propiedades Fundamentales: linealidad, $\mathfrak{F}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)(n) = n\hat{f}(n)$, $\mathfrak{F}\left(f * g(x)\right)(n) = \hat{f}(n)\,\hat{g}(n)\,, \ldots$
    - Lema de Riemann-Lebesgue
    - Algunas aplicaciones y ejemplos de aplicaciones de las Series de Fourier
29. 3diciembre2014. Convergencia de las Series de Fourier.
    - Un poco de Historia sobre el estudio de la convergencia de las SdF.
    - Sumas parciales de Fourier y Nucleo de Dirichlet.
    - Cuanto son grandes los coeficientes de Fourier? Relación entre regularidad L^p, C^k y C^α y la magnitud de los coeficientes de Fourier.
    - Convergencia en L^p (resultados fundamentales enunciados)
    - Convergencia Puntual de las SdF: un problema viejo (Dirichlet, Hardy, Bochner,...) y todavía estudiado (Kolmogorov (contraejemplo), Carleson, Hunt, Kahane-Katznelson,...)

30. 8diciembre2014. **FIESTA.**

31. 10diciembre2014. Convergencia de las Series de Fourier. (continuado)

    - Sumación de series a la Cesaro.
    - Núcleo de Fejer y convergencia puntual de Series de Fouries.
    - El Teorema de Zygmund.

    La transformada de Fourier. Seguimos Cap 8.3 de [4]

    - Definición y primeras propiedades. Similitudes con la Series de Fourier.
    - La Transformada de Fourier (TdF) para funciones de $L^1(\mathbb{R}^N)$.
    - Propiedades fundamentales de la TdF : comportamiento con respecto a traslaciones, rotaciones. (probado)
    - La transformada de la función Gaussiana. (probado)

32. 12diciembre2014. **Recuperación Clase.** La transformada de Fourier. Seguimos Cap 8.3 de [4]

    - Propiedades fundamentales de la TdF : comportamiento con respecto al producto y a la convolución, comportamiento con respecto a la derivación. (probado)
    - Lema de Riemann-Lebesgue. (probado)
    - La clase de L. Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.
        - Definición y propiedades de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (espacio de Frechét, admite metrica o distancia).
        - Caracterizaciones de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.
        - La TdF es isomorfismo (lineal y biyectiva) de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. (probado)
    - La Formula de inversion de la TdF. (probado)

33. 15diciembre2014. La transformada de Fourier. Seguimos Cap 8.3 de [4]

    - La Transformada de Fourier en L^2
    - El Teorema de Plancharel. (probado)
    - La transformada de Fourier-Stieltjes, es decir la TdF de Medidas.
    - La transformada de la δ_0.

34. 17diciembre2014. Aplicaciones de la TdF a Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDPs) Elipticas y Parabolicas.

   - EDPs elípticas lineales. Soluciones Fundamentales. La función de Green (calculada). Formula de representación.
   - EDPs Parabólicas: La ecuación del Calor. El núcleo del calor y la formula de representación.

35. 8enero2014. **Examen Final.**

Referencias

[1] Brezis, Haim. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, (1983). xiv+234 pp. ISBN: 2-225-77198-7
Edición Española: Brezis, Haim, *Análisis funcional: teoría y aplicaciones,* Vol. **88** de Alianza Universidad Textos, Alianza (Madrid), (1984) 233 pp. ISBN: 8420680885, 9788420680880

[2] Brezis, Haim Functional analysis, *Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, (2011). xiv+599 pp. ISBN: 978-0-387-70913-0

[3] DiBenedetto, Emmanuele *Real analysis.* Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (2002). xxiv+485 pp. ISBN: 0-8176-4231-5

[4] Folland, Gerald B. *Real analysis. Modern techniques and their applications. Second edition.* Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, (1999). xvi+386 pp. ISBN: 0-471-31716-0

[5] Lieb, Elliott H.; Loss, Michael *Analysis. Second edition.* Graduate Studies in Mathematics, **14.** American Mathematical Society, Providence, RI, (2001). xxii+346 pp. ISBN: 0-8218-2783-9

[6] Royden, H. L. *Real analysis. Third edition.* Macmillan Publishing Company, New York, (1988). xx+444 pp. ISBN: 0-02-404151-3

[7] Rudin, Walter. *Real and complex analysis. Third edition.* McGraw-Hill Book Co., New York, (1987). xiv+416 pp. ISBN: 0-07-054234-1

[8] Tao, Terence. *An epsilon of room, I: real analysis. Pages from year three of a mathematical blog.* Graduate Studies in Mathematics, **117.** American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. xii+349 pp. ISBN: 978-0-8218-5278-1

[9] Tao, Terence. *An introduction to measure theory.* Graduate Studies in Mathematics, **126.** American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. xvi+206 pp. ISBN: 978-0-8218-6919-2

[10] Wheeden, Richard L.; Zygmund, Antoni. *Measure and integral. An introduction to real analysis.* Pure and Applied Mathematics, Vol. **43.** Marcel Dekker, Inc., New York-Basel, (1977). x+274 pp. ISBN: 0-8247-6499-4

[11] William P. Ziemer. *Modern real analysis.* Lecture notes (2004).