

Hoja 7: la integral de Riemann

1.- Probar que la función $y = [x]$ es integrable en $[0, 5]$ y calcular $\int_0^5 [x] dx$.

2.- Sea f una función continua en $[a, b]$, no negativa, y que cumple $\int_a^b f(x) dx = 0$. Probar que f es cero en todos los puntos.

3.- Dar un ejemplo de una función definida en un intervalo $[a, b]$, no integrable, y tal que f^2 sea integrable.

4.- Sea una función continua en $[a, b]$. Definimos la *media* o *valor esperado* de f sobre $[a, b]$ como

$$E(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

(a) Sean M y m respectivamente el máximo y el mínimo de f sobre $[a, b]$. Demostrar que $m \leq E(f) \leq M$. Si f es constante, ¿cuál es su valor esperado?

(b) Usando el teorema de los valores intermedios y el apartado anterior probar el siguiente resultado: Sea f una función continua en $[a, b]$. Entonces, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c).$$

(c) Supongamos que f es impar (es decir, $f(x) = -f(-x)$). Hallar $E(f)$ sobre $[-a, a]$. Sugerencia: interpretar la integral en términos de áreas.

(d) Evaluar $\int_{-a}^a x^7 \sin(x^4) dx$.

5.- Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1], \\ x+1 & \text{si } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Definimos F con $F(0) = 0$ y $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, si $x \in (0, 2]$. Determinar F de forma explícita y probar que es continua en el intervalo $[0, 2]$, aunque f no lo sea.

6.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$F(x) = \int_0^{x^2} (\sin t^2) \log(1+t^2) dt, \quad G(x) = \int_{x^2}^1 \cos^2 t^2 dt, \quad H(x) = \int_{-e^x}^{\sin^2 x} \cos(\log(2t^2)) dt.$$

7.- (*) Encontrar una función f definida y continua en $[0, \infty)$ tal que

$$\int_0^{x^2} (1+t) f(t) dt = 6x^4.$$

8.- Sea $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 3, \\ x+a & \text{si } 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

¿Qué valor debemos dar a a para que exista una función F en $[0, 4]$ con $F'(x) = f(x)$? Encontrar todas las funciones F posibles que cumplan la condición anterior.

9.- Calcular las primitivas siguientes:

$$(1) \int \frac{\sqrt[5]{x^3} + \sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (2) \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \quad (3) \int \frac{e^x + e^{2x}}{e^{3x}} dx$$

$$(4) \int a^x dx \quad (5) \int (\tan x)^2 dx \quad (6) \int \frac{dx}{x^2 + 4}$$

$$(7) \int \frac{8x^2 + 6x + 4}{x+1} dx \quad (8) \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

10.- Calcular las primitivas siguientes, usando la fórmula de integración por partes:

$$\begin{array}{lll} (1) \int x^2 e^x dx & (2) \int e^{ax} \operatorname{sen}(bx) dx & (3) \int (\ln x)^3 dx \\ (4) \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx & (5) \int \cos(\ln x) dx & (6) \int x(\ln(x))^2 dx \end{array}$$

11.- Calcular las primitivas siguientes, usando el cambio de variables adecuado en cada caso:

$$\begin{array}{lll} (1) \int e^x \operatorname{sen}(e^x) dx & (2) \int \frac{\ln x}{x} dx & (3) \int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx \\ (4) \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx & (5) \int x\sqrt{1-x^2} dx & (6) \int \ln(\cos x) \tan x dx \end{array}$$

12.- Calcular las primitivas siguientes, usando cambios de variable trigonométricos:

$$\begin{array}{lll} (1) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & (2) \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} & (3) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \\ (4) \int \sqrt{1-x^2} dx & (5) \int \sqrt{4+x^2} dx & (6) \int \sqrt{x^2-4} dx \end{array}$$

13.- Calcular las primitivas siguientes, mediante descomposición en fracciones simples:

$$\begin{array}{lll} (1) \int \frac{2x^2 + 7x - 1}{x^3 + x^2 - x - 1} dx & (2) \int \frac{x^3 + x + 2}{x^4 + 2x^2 + 1} dx & (3) \int \frac{2x^2 + x + 1}{(x+3)(x-1)^2} dx \\ (4) \int \frac{dx}{x^4 + 1} & (5) \int \frac{x^3 + 1}{x^2 + x + 1} dx & \end{array}$$

14.- Calcular las primitivas siguientes:

$$\begin{array}{lll} (1) \int (6x^2 - 8)^{25} x dx & (2) \int \frac{dx}{2x^2 + 8} & (3) \int \frac{3x^2 + 2x - 1}{x + 2} dx \\ (4) \int \frac{e^x}{2e^x - 1} dx & (5) \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + 8} dx & (6) \int \frac{x^4}{x^2 + 4} dx \\ (7) \int x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx & (8) \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx & (9) \int x^2 \sqrt{1+x} dx \\ (10) \int \frac{dx}{9x^2 + 6x + 5} & (11) \int \frac{x^3}{x^3 - 3x + 2} dx & (12) \int \frac{x}{x^3 - x^2 + 4x - 4} dx \\ (13) \int \frac{e^x + 3e^{-x}}{e^{2x} + 1} dx & (14) \int \frac{dx}{2 + 3 \cos x} & (15) \int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2} \\ (16) \int \frac{x}{(x^2 - 1)^2} dx & (17) \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} & (18) \int \frac{x^5 + 2x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} dx \\ (19) \int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+3)} & (20) \int \frac{x}{1+x^4} dx & (21) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} \\ (22) \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} & (23) \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos x} & (24) \int \frac{dx}{\cos x} \\ (25) \int \frac{dx}{\cos^3 x} & (26) \int \log x dx & (27) \int x \log x dx \\ (28) \int x^2 \operatorname{sen} x dx & (29) \int x^3 e^{-2x} dx & (30) \int \cos(2x) e^{3x} dx \\ (31) \int \operatorname{sen}^4 x \cos^6 x dx & (32) \int \operatorname{sen}^3 x \cos^6 x dx & (33) \int \operatorname{sen}(2x) \cos(5x) dx \\ (34) \int \arctan x dx & (35) \int \left(\frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} x}{1-x^2} \right)^{\frac{1}{2}} dx & (36) \int x^2 \operatorname{arc} \cos x dx \end{array}$$

15.- (*)

- (a) Hallar $\int \tan x \, dx$, $\int \tan^2 x \, dx$. Expresar $\int \tan^n x \, dx$ en términos de $\int \tan^{n-2} x \, dx$. Como aplicación dar una fórmula para $\int \tan^8 x \, dx$ y para $\int \tan^7 x \, dx$.
- (b) Hallar $\int \sec^2 x \, dx$, $\int \sec^3 x \, dx$. Expresar $\int \sec^n x \, dx$ en términos de $\int \sec^{n-2} x \, dx$. Como aplicación dar una fórmula para $\int \sec^6 x \, dx$ y para $\int \sec^7 x \, dx$.

16.- (*) Calcular los siguientes límites expresándolos como límites de sumas de Riemann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^r + 2^r + \cdots + n^r}{n^{r+1}}, \quad r > 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n(n+n)}} \right).$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+k}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)k}{n^3}.$$

17.- Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias y en caso afirmativo calcular su valor:

(1) $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} \, dx$ (2) $\int_2^{\infty} \frac{x}{x^2-x-2} \, dx$ (3) $\int_0^1 \log x \, dx$ (4) $\int_1^{\infty} \frac{x}{1+x^4} \, dx$

(5) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log^2 x}$ (6) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{4+x^2} \, dx$ (7) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ (8) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

18.- Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

(1) $\int_1^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} \, dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (2) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x + (x^3 + 1)^{\frac{1}{2}}}$ (3) $\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}} \, dx$

(4) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(-\log x)^{\alpha} x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (5) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\cosh x} \, dx$ (6) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx$

19.- (*)

- (a) Usar la fórmula de integración por partes para demostrar la fórmula de reducción

$$\int x^{\alpha} e^{\beta x} \, dx = \frac{1}{\beta} x^{\alpha} e^{\beta x} - \frac{\alpha}{\beta} \int x^{\alpha-1} e^{\beta x} \, dx, \quad \text{para } \alpha > 0, \quad \beta \neq 0.$$

- (b) La función Γ se define para $x > 0$ como $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$. Demostrar que se tiene $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$. Deducir entonces que $\Gamma(n+1) = n!$.

20.-

- (a) Hallar el área limitada entre las gráficas de $f(x) = 8 - x^2$, $g(x) = x^2$.
- (b) Hallar el área limitada entre las gráficas de $f(x) = 1/(x^2 + 1)$, $g(x) = \frac{1}{2}|x|$.
- (c) Calcular el área comprendida entre las curvas $y = x e^{-x}$, $y = x^2 e^{-x}$ para valores de $x \geq 1$.
- (d) Hallar el área limitada por la curva $y = \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{2}}$, su asíntota vertical y los ejes de coordenadas.

21.- Sea $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} \, dt$, y sea G su función inversa. Hallar $G'(0)$.

22.- (*) Sean f, g continuas, con $f \geq 0$ y g creciente. Demostrar que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(t)g(t) \, dt = g(a) \int_a^c f(t) \, dt + g(b) \int_c^b f(t) \, dt.$$

23.- (*) Calcular

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen} x + x - 4}{\cos x + 2} \, dx$$