Hoja 5: Integración

1.- Evaluar las siguientes integrales indefinidas:

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\,x^2+8}$	(2) $\displaystyle\int \frac{3\,x^2+2\,x-1}{x+2}\,dx$	(3) $\displaystyle\int \frac{e^x}{2\,e^x-1}\,dx$
(4) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	(5) $\displaystyle\int x^2\,\sqrt{1+x}\,dx$	(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{9\,x^2+6\,x+5}$
(7) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^3-3\,x+2}\,dx$	(8) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-x^2+4\,x-4}\,dx$	(9) $\displaystyle\int \frac{e^x+3\,e^{-x}}{e^{2\,x}+1}\,dx$
(10) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx$	(11) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$	(12) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2\,(x^2+3)}$
(13) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$	(14) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\,\cos x}$	(15) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\,\cos^6 x\,dx$
(16) $\displaystyle\int x\,\log x\,dx$	(17) $\displaystyle\int x^2\,\operatorname{sen} x\,dx$	(18) $\displaystyle\int \arctan x\,dx$

2.- El teorema fundamental del cálculo integral establece que, si f es una función continua en $[a,b]$, la función $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ es derivable en $[a,b]$ y su derivada es $F'(x)=f(x)$. Usando dicho teorema y la regla de la cadena, calcular la derivada de la siguiente función: $F(x)=\int_0^{x^2}(\operatorname{sen} t^2)\,\log(1+t^2)\,dt\,.$

3.- Encontrar una función f definida y continua en $[0,\infty)$ tal que $\int_0^{x^2}(1+t)\,f(t)\,dt=6\,x^4$.

4.- Calcular el área delimitada por las curvas siguientes:

(i) $y=\operatorname{sen}\,x$, $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{2}$ y el eje x. (ii) $y=5-x^2$ e $y=3-x$

(iii) $y=x^2,\ y=(x-2)^2,\ y=(2-x)/6.$ (iv) $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=2x$

5.- Calcular el área entre la gráfica de la función $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$ y su asíntota.

6.- Calcular el área comprendida entre las curvas $y=x\,e^{-x}$, $y=x^2\,e^{-x}$ para valores de $x\geq 1$.

7.- Existen funciones (algunas de apariencia sencilla) que no tienen primitiva elemental: el resultado de integrarlas no puede expresarse como combinación (sumas, productos, composiciones) de funciones racionales, exponenciales, logaritmos, funciones trigonométricas y sus inversas y funciones hiperbólicas y sus inversas. Utilizar la regla del trapecio (con cuatro subintervalos) para calcular $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$, $\int_1^5 \sqrt{x^3-1}dx$

8.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

(i) $\frac{dx}{dt}=\sqrt{3t+1}$, con $x=1$ para $t=0$.

(ii) $\frac{dx}{dt}=\frac{tx}{1+t^2}$, con $x=1$ para $t=0$.

(iii) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}y^2-2y$, con $y=-3$ para $x=0$.

(iv) $\frac{dy}{dx}=(y+1)e^{-x}$, con $y=2$ para $x=0$.

(v) $\frac{dy}{dx}=x^2y^2$, con $y=1$ para $x=1$.

9.- Un objeto se mueve a lo largo de un eje de coordenadas con velocidad $v(t)=t(1-t)$ unidades por segundo. Su posición inicial es 2 unidades a la izquierda del origen. a) Hallar la posición del objeto 10 segundos más tarde. b) Hallar la distancia total recorrida por el objeto en esos 10 segundos.

10.- Una partícula se mueve a lo largo del eje x con velocidad $v(t)=At^2+1$. Calcular A sabiendo que $x(1)=x(0)$. Hallar la distancia total recorrida por la partícula durante el primer segundo.

11.- La concentración de oxígeno $f(t)$ en un estanque contaminado con un residuo orgánico varía a lo largo del tiempo. La velocidad de variación viene dada por:

$$v(t)=\frac{t^2-1}{(t^2+1)^2}\qquad (t=\text{“tiempo en semanas”}).$$

a) Hallar la diferencia aproximada de concentración de oxígeno entre $t = 0$ y $t = 1$ utilizando la regla del trapecio con 4 subintervalos.

b) Comparar el resultado aproximado con el exacto, sabiendo que

$$f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}, \text{ para } t \geq 0.$$

12.- El tamaño $N(t)$ de una población varía a lo largo del tiempo. Su velocidad de variación viene dada por:

$$v(t) = \frac{30\, e^{-0'1t}}{(1 + 3\, e^{-0'1t})^2} \qquad (t\text{=“tiempo en años”}).$$

a) Calcular la variación de la población entre $t = 0$ y $t = 20$: obtener el resultado exacto y el resultado aproximado utilizando la regla del trapecio y la regla de Simpson con 2 subintervalos.

b) Si $N(0) = 25$. ¿cuál es el tamaño de la población al cabo de 20 años?

13.- Se observa que la velocidad de variación del número de individuos de una población viene dada por:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{100}(x - 100)(200 - x).$$

Inicialmente hay $x(0) = 180$ individuos. a) Hallar la función $x(t)$. b) Calcular en qué valor tiende a estabilizarse la población cuando el tiempo crece.

14.- Llamamos $x(t)$ a la proporción de individuos de una especie que existe en un instante t. Se sabe que la velocidad de crecimiento de x con respecto a t es proporcional a $x(1 - x)$. Resolver la ecuación diferencial correspondiente. ¿A qué modelo de función corresponde?

15.- Un tanque contiene inicialmente 100 litros de agua con sal. El contenido total de sal es de 1 Kg. En un determinado momento, se comienza a sacar lquido del tanque, a razón de 3 litros por minuto (con lo cual, cada minuto, se pierde un 3 % de sal). Para que la cantidad total de líquido se mantenga constante, cada minuto se añaden 3 litros de otra solución salina cuyo contenido en sal es de 250 gramos por litro (con lo cual, cada minuto, se añaden 750 gr. de sal).

a) Hallar la cantidad de sal en el tanque, $S(t)$, en función del tiempo, a partir de la ecuación diferencial correspondiente.

b) Determinar el momento en que la solución del tanque contiene 13 Kg. de sal.

c) Calcular la cantidad de sal que habrá a largo plazo.

16.- Cada 8 horas tomamos 200 miligramos de un medicamento, y cada 8 horas el cuerpo elimina una quinta parte de lo que tiene.

a) Escribir la función que expresa el número de miligramos en el organismo en función del tiempo (tomando como unidad de tiempo los intervalos de 8 horas).

b) A largo plazo, ¿cuál será la cantidad de medicamento en el organismo?

17.- Durante una epidemia de gripe en una población, la velocidad de propagación de la enfermedad, es decir, la velocidad de variación del número de enfermos es (aproximadamente): $v(t) = 1000\ t\ e^{-0{,}5t}$ donde t es el número de días desde el inicio de la epidemia.

(a) Utilizado la regla del trapecio con dos intervalos, calcula (aproximadamente) el número de individuos que se ponen enfermos durante los cuatro primeros días. Compara este valor con el valor exacto.

(b) ¿En qué momento es máxima la velocidad de propagación de la gripe?

18.- La velocidad de variación de una población de bacterias con recursos limitados viene dada por la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = -2(x - 5),$$

donde x es el “número de bacterias (en millones)” y t es el “tiempo transcurrido (en horas)”. Inicialmente hay 1 millón de bacterias.

(a) Hallar la función que expresa x en función de t, resolviendo la ecuación diferencial.

(b) ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 2 horas? ¿Cuántas habrá a largo plazo?