Primer curso de grado en Biologia - Curso de Matemáticas
2012-2013
Soluciones Hoja 5

Diciembre 2012
Diana Stan - Departamento de Matemáticas UAM

Problema 1. Las soluciones de los integrales:

(14) $-\frac{1}{\sin x} + \ln|1+\sin x| - \ln|\cos x| + C.$

(15) $-\frac{1}{7}\cos^7 x + \frac{1}{9}\cos x + C.$

(17) $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$

(18)$x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

Problema 2. $F'(x) = \left[\sin((x^2)^2)\ln(1+(x^2)^2)\right]\cdot(x^2)' = 2x(\sin x^4)\ln(1+x^4).$

Problema 3. Derivamos la expresion y usando las indicaciones del problema anterior se obtiene

$$(1+x^2)f(x^2)\cdot(x^2)' = (6x^4)'$$

y obtenemos

$$(1+x^2)f(x^2)\cdot 2x = 24x^3$$

$$f(x^2) = \frac{12x^2}{1+x^2}.$$

Para $x > 0$ se obtiene $f(x) = \frac{12x}{1+x}$.

Problema 4.

(i) La funcion $\sin x$ es positiva en $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ por lo tanto

$$\text{Area} = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin x dx = \frac{1}{2}.$$

(ii)La funcion $5 - x^2$ es mayor que $3 - x$ cuando $x \in [-1, 2]$. Haciendo la representacion grafica de las dos funciones se obtiene que

$$\text{Area} = \int_{-1}^{2} (5-x^2) - (3-x)dx = ...$$

(iii) Representamos las funciones y obtenemos

$$\text{Area} = \int_{1/2}^{1} \left[x^2 - \frac{2-x}{6}\right] dx + \int_{1}^{2} \left[(x-2)^2 - \frac{2-x}{6}\right] dx = ...$$

Problema 4.

(i)

$$\int_1^x dx = \int_0^t \sqrt(3t+1)dt \Rightarrow x - 1 = \frac{1}{3}\frac{2}{3}(3t+1)^{3/2}\Big|_0^t = \frac{2}{9}(3t+1)^{3/2} - \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{3}\frac{2}{3}(3t+1)^{3/2} + \frac{7}{9}, \quad t \geq -1/3.$$

(ii)

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \int_0^t \frac{t}{1+t^2} \Rightarrow \ln x - \ln 1 = \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^t = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) = \ln(1+t^2)^{1/2}$$

$$\Rightarrow x(t) = (1+t^2)^{1/2}.$$

(iii)

$$\int_{-3}^y \frac{1}{\frac{1}{2}y^2 - 2y} dy = \int_0^x dx$$

$$\Rightarrow 2\int_{-3}^y \frac{1}{y^2 - 4y} dy = x\Big|_0^x \Rightarrow 2\int_{-3}^y \left(\frac{A}{y} + \frac{B}{y-4}\right) dy = x.$$

Encontrar A y B y integrar. Finalmente escribir la expresion de $y(x)$.

(iv)

$$\int_2^y \frac{1}{y+1} dy = \int_0^x e^{-x} dx$$

$$\Rightarrow \ln(1+y)\Big|_2^y = -e^{-x}\Big|_0^x \Rightarrow \ln(1+y) - \ln 3 = -e^{-x} + 1 \Rightarrow \ln\frac{1+y}{3} = -e^{-x} + 1$$

$$\Rightarrow 1 + y = 3e^{-e^{-x}+1} \Rightarrow y(x) = 3e^{-e^{-x}+1} - 1.$$

(iv)

$$\int_1^y \frac{1}{y^2} dy = \int_1^x x^2 dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y}\Big|_1^y = \frac{x^3}{3}\Big|_1^x \Rightarrow -\frac{1}{y} + 1 = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{4}{3} - \frac{x^3}{3} = \frac{4 - x^3}{3}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{3}{4 - x^3}, \quad x \neq \sqrt[3]{4}.$$

Problema 14. Sabemos que $x'(t)$ es la velocidad y es proporcional a $x(1-x)$. Por lo tanto $x'(t) = kx(1-x)$ para una constante k. La ecuacion diferencial es

$$\frac{dx}{dt} = kx(1-x)$$

Resolvemos usando integrales indefinidas porque el problema no nos da el dato inicial.

$$\int \frac{1}{x(1-x)} dx = \int k dt$$

$$\int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} \right) dx = kt + C \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{x}{1-x} = kt + C$$

$$\frac{x}{1-x} = e^{2(kt+C)} \Rightarrow x = (1-x)e^{2(kt+C)}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{e^{2(kt+C)}}{1+e^{2(kt+C)}} = \frac{1}{e^{-2(kt+C)}+1}.$$

La funcion $x(t)$ es un tipo de funcion logistica (ver Hoja 4)..

Problema 15. La ecuacion diferencial corespondiente es $S'(t) = -0.03S(t) + 0.75$, $S(0) = 1$, donde $S(t)$ es la cantidad de sal en el tanque despues t unidades de tiempo, escrita en Kg.

Solucion de la ecuacion diferencial $S(t) = 25 - 24e^{-0.03t}$.

A largo plazo $S(t)$ se estabiliza al valor 25 Kg.

Problema 16. La ecuacion diferencial corespondiente es $x'(t) = -\frac{1}{5}x(t) + 200$, donde $x(t)$ es el numero de miligramos de medicamento en el organismo despues t unidades de tiempo.