Hoja 3: Derivadas, gráficas de funciones y polinomios de Taylor

1.- En ocasiones, además de saber cómo depende una variable Y (por ejemplo la altura de los indiviuos de una especia determinada) de otra variable X (por ejemplo el peso), interesa saber también cómo depende ésta última de la primera y así aparece el concepto de función inversa. Para ilustrarlo, estudiar y representar la función $f(x) = \tan x$ en el intervalo $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Comprobar que la función inversa, la arcotangente, está definida para todos los números. Estudiarla también y representarla.

2.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $y = \log \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ (b) $y = \operatorname{sen}(\log x)$ (c) $y = \log(x^2 \log^3 x)$

(d) $y = x^{\frac{1}{x}}$ (e) $y = x^{\log x}$ (f) $y = (\log x)^x$

3.- Para aplicar a un problema físico la regla de la cadena que se ha practicado en el ejercicio anterior, supongamos que un observador se encuentra situado a 100 m de un globo que se eleva a una velocidad de 50 m/min. ¿Con qué rapidez crece el ángulo de elevación de la línea de visión del observador cuando el globo está a una altura de 100 m? Como sugerencia, si llamamos $f(t)$ a la altura del globo en el instante t y el ángulo buscado es $g(f(t))$, se tiene que $f(t)/100 = \tan g(f(t))$ (dibujar un triángulo rectángulo para comprobarlo).

4.- Un punto P se mueve sobre la parábola $x = y^2$ situada en el primer cuadrante de forma que su coordenada x está aumentando a razón de 5 cm/seg. Calcular la velocidad a la que el punto P se aleja del origen cuando $x = 9$. Como sugerencia, es útil recordar que la distacia $d(t)$ al origen de un punto que está en las coordenadas $(x(t), y(t))$ en el instante t es precisamente $\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$.

5.- Hallar el valor de los parámetros para que las funciones que se definen a continuación sean derivables en todo su dominio:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \le 2, \\ a \cdot x + b & \text{si} \quad x > 2. \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} a + b \cdot x^2 & \text{si} \quad |x| \le 2, \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{si} \quad |x| > 2. \end{cases}$$

6.- Calcular el valor máximo y mínimo de la función $f(x) = x^3 - 3\,x^2 - 9\,x + 1$ en el intervalo $[-2, 6]$.

7.- Demostrar que la ecuación $6\,x^5 + 13\,x + 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

8.- Estudiar y representar las gráficas de las siguientes funciones en el conjunto de puntos donde estén definidas.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x+2}$ (b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4\,x + 5}$ (c) $f(x) = e^{-x^2}$

(d) $f(x) = 1 + \dfrac{16}{2^{\frac{1}{x}} - 4}$ (e) $f(x) = \operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (f) $f(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

(g) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \log|x|$ (h) $f(x) = \log \dfrac{1+x}{1-x}$ (i) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

9.- Hallar el polinomio de Taylor de grado 3 de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \cos x$ en $a = \frac{\pi}{4}$ (b) $f(x) = \log x$ en $a = 1$ (c) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ en $a = 1$