Hoja 2: Límites y continuidad de funciones

1.- Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

$$(a)\quad f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6},\qquad (b)\quad f(x)=\sqrt{x^2-1},$$

$$(c)\quad f(x)=\frac{1}{x-\sqrt{1-x^2}},\qquad (d)\quad f(x)=\frac{1}{1-\log x},$$

$$(e)\quad f(x)=\frac{\sqrt{5-x}}{\log x},\qquad (f)\quad f(x)=\log(x-x^2).$$

2.- Estudia la simetría de las siguientes funciones:

$$(a)\quad f(x)=\frac{x}{x^2-1},\qquad (b)\quad f(x)=\sqrt{1-x^2},$$

$$(c)\quad f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x},\qquad (d)\quad f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\cos x.$$

3.- Si f y g son dos funciones impares, ¿cómo son $f+g$, $f\cdot g$ y $f\circ g$? ¿Y si f es par y g impar?

4.- Estudia cuáles de las siguientes funciones son inyectivas, hallando su inversa en caso de que lo sean o, en caso contrario, un ejemplo de dos puntos con la misma imagen.

$$(a)\quad f(x)=7x-4,\qquad (b)\quad f(x)=\operatorname{sen}(7x-4),$$

$$(c)\quad f(x)=(x+1)^3+2,\qquad (d)\quad f(x)=\frac{x+2}{x+1},$$

$$(e)\quad f(x)=x^2-3x+2,\qquad (f)\quad f(x)=\frac{x}{x^2+1},$$

$$(g)\quad f(x)=\mathrm{e}^{-x},\qquad (h)\quad f(x)=\log(x+1).$$

5.- Esboza, con los mínimos cálculos posibles, la gráfica de las siguientes funciones:

$$(a)\quad f(x)=(x+2)^2-1,\qquad (b)\quad f(x)=\sqrt{4-x},$$

$$(c)\quad f(x)=\text{mín}\{x,x^2\},\qquad (d)\quad f(x)=x^2+1/x,$$

$$(e)\quad f(x)=1-\mathrm{e}^{-x},\qquad (f)\quad f(x)=|\mathrm{e}^{x}-1|,$$

$$(g)\quad f(x)=|x^2-1|,\qquad (h)\quad f(x)=[x]$$

Indicación: $[x]=n$ denota la parte entera de x, es decir, el mayor entero $n\le x$.

6.- Calcula los siguientes límites simplificando los factores comunes que puedan aparecer:

$(a)\quad \lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4},\qquad (b)\quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{3-\sqrt{x^2+8}},$

$(c)\quad \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2},\qquad (d)\quad \lim_{x\to -1} \left(\frac{3}{x+1}-\frac{12}{x^2+6x+5}\right),$

$(e)\quad \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2}{x-1}\right),\qquad (f)\quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}.$

7.- Discutir la existencia de los límites siguientes y calcular su valor si es posible:

$(a)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4x-7}{7x^2-\sqrt{2x^6+x^5}},\qquad (b)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{(3x^2-1)^2(x+7)^3}{x^7+6},$

$(c)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2-7},\qquad (d)\quad \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x}-x\right),$

$(e)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x-1},\qquad (f)\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x-1},$

$(g)\quad \lim_{x\to 0^+} e^{1/x},\qquad (h)\quad \lim_{x\to 0^-} e^{1/x},$

$(i)\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}},\qquad (j)\quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}},$

$(k)\quad \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4},\qquad (l)\quad \lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$

8.- Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$(a)\quad f(x)=\frac{x^3-8}{x^2-4},\qquad (b)\quad f(x)=x-[x],$

$(c)\quad f(x)=\frac{e^{-5x}+\cos x}{x^2-8x+12},\qquad (d)\quad f(x)=e^{3/x}+x^3-9,$

$(e)\quad f(x)=x^3\operatorname{tg}(3x+2),\qquad (f)\quad f(x)=\sqrt{x^2-5x+6},$

$(g)\quad f(x)=(\log(x-2))^3,\qquad (h)\quad f(x)=(x-5)\log(8x-3),$

(i) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\in[a-1,a), \\ x+a & \text{si} \quad x\in[a,a+1]. \end{cases}$ (j) $f(x)=\begin{cases} -|\operatorname{sen} x|-4 & \text{si} \quad x<\pi, \\ |\cos x|-5 & \text{si} \quad x\geq\pi. \end{cases}$