

Hoja 1: Álgebra lineal y dinámica de poblaciones

---

1. Resolver los siguientes SEL usando el método de Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$$

2. Realizar las siguientes multiplicaciones de matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Sea A la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Realiza la siguientes multiplicaciones de matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} A; \quad A \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A; \quad A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Calcula la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tal que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Hallar la matriz inversa de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Las hembras de una población se pueden clasificar en dos grupos de edad (hembras jóvenes y hembras adultas). La matriz de Leslie que describe la evolución de esta población es la siguiente:

$$L = \begin{pmatrix} & 2 & 4 \\ 0,11 & & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Si inicialmente hay 100 hembras de cada clase, ¿cuántas habrá en el siguiente período de tiempo?
- (b) A largo plazo, ¿cuál será la tasa de variación de cada uno de los grupos? ¿Se extinguirá la población?
- (c) A largo plazo, ¿cuál será la proporción de hembras jóvenes y adultas?
7. En cierta especie animal, las hembras se clasifican en *juveniles* (hasta 1 año de edad) y *adultas* (de 1 a 2 años de edad).

Solamente el 40% de las hembras jóvenes sobreviven cada año y pasan a adultas. Todavía no tienen capacidad de reproducción.

Las hembras adultas no sobreviven al año siguiente, y tienen una descendencia media de 1,6 hembras cada año.

- (a) Construir la matriz de Leslie correspondiente a este modelo de evolución.
- (b) Calcular la tasa de crecimiento o decrecimiento a largo plazo.
- (c) Calcular la proporción aproximada de hembras jóvenes que formarán parte de la población a largo plazo.
8. Se lleva a cabo un estudio sobre una población de ballenas azules. Las hembras son clasificadas en cuatro grupos de edad, y sobre cada grupo se obtiene la siguiente información en términos de fertilidad (número medio de crías hembras en cada período) y en terminos de mortalidad:

GRUPO DE EDAD:	0 a 3	4 a 7	8 a 11	12 a 15
NO. MEDIO DE CRÍAS:	0	0'63	1'00	0'90
MORTALIDAD:	43%	43%	43%	100%

Formular un modelo matricial para la evolución de esta población. Si en un determinado momento, la población está formada por 20, 30, 40 y 20 ballenas hembra de cada tipo de edad, ¿cuál será la composición de la población (aproximadamente) al cabo de dos períodos de tiempo?

9. En una granja de cría de cerdos, los animales son clasificados según sus edades de la siguiente forma:

- Cochinitos: De 0 a 1 año.
- Lechones: De 1 a 2 años.
- Jóvenes: De 2 a 3 años.
- Adultos: De 3 a 4 años.

El procedimiento de gestión de las hembras de la granja es el siguiente:

- Se sacrifica al 60% de las que van naciendo para su consumo como cochinitos.
- Se sacrifica para su consumo a todas las hembras cuando llegan a los 4 años. No se sacrifica a ninguna de las demás, y se supone que ningún animal muere por otras causas.
- Se dedica a todas las hembras jóvenes y adultas a la cría. Se sabe que, en media, cada hembra joven tendrá 0,5 camadas de 5 cochinitos, cada hembra adulta tendrá 0,8 camadas de 5 cochinitos, y que el 50% de todos los nuevos nacidos serán hembras.

Formular el modelo apropiado para describir la evolución de la población de las hembras.

10. La población de cierta especie de animales en un bosque está dividida en dos grupos de edad (jóvenes y adultos). La correspondiente matriz de Leslie es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Interpreta el significado de cada uno de los elementos de la matriz anterior.
- b) Calcula el autovalor dominante de  $A$  y un autovector asociado.
- c) Sea  $X(k)$  el número de animales de cada grupo en la etapa  $k$ . Si en la etapa 0 hay únicamente 10 animales jóvenes en el bosque, calcula  $X(1)$ ,  $X(2)$ ,  $X(3)$  y  $X(4)$ . A partir de  $X(4)$  calcula la proporción exacta de individuos de cada grupo respecto al total de la población en la etapa 4.
- d) Calcula la misma proporción de forma aproximada mediante el autovector asociado al autovalor dominante, y compara el resultado obtenido en este apartado con el del apartado anterior.

11. Supongamos que

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 1 \\ 0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

es la matriz de transición de una población de venados hembras, dividida para su estudio en jóvenes y adultas.

- a) Demostrar que, a la larga, el tamaño de la población se multiplicará por un factor aproximado de 1.27 (es decir, crecerá un 27%) cada generación.

- b) Los granjeros y otras personas del área no quieren que la población crezca, y deciden poner en marcha una caza controlada. Si se decide cazar una proporción  $h$  de los venados jóvenes antes de que pasen a adultos, ¿cuál será ahora la matriz de transición?
  - c) Prueba que  $h = 0.8$  es una caza demasiado intensiva, es decir, la población de venados se extinguiría.
  - d) ¿Es posible seleccionar  $h$  de manera que la población de venados no crezca ni desaparezca? ¿Cuál sería ese valor de  $h$ ?
12. Estudiamos una población de aves. Clasificamos las hembras en tres grupos de edad: jóvenes (de 0 a 1 año), adultas fértiles (de 1 a 2 años), y adultas no fértiles (de 2 a 3 años). Sabemos que un 12% de las hembras jóvenes y un 54% de las adultas fértiles sobreviven cada año. Ninguna de las adultas no fértiles sobrevive. Cada hembra fértil produce dos hembras al año (en promedio).
- a) Describir la evolución de la población en forma matricial.
  - b) Transcurridos unos años, determina en qué tanto por ciento crecerá o decrecerá anualmente la población de hembras.
  - c) Determina cuál debería ser el tanto por ciento de supervivencia de las hembras jóvenes para que la población se mantuviera estable.