FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Julián de la Horra
Departamento de Matemáticas U.A.M.

1 Introducción

En las Ciencias Experimentales es muy frecuente que tengamos interés en poder expresar una variable (variable respuesta o variable dependiente) en función de dos o más variables (variables explicativas o variables independientes). Por ejemplo, podemos estar interesados en expresar:

- El peso de una persona en función de su estatura y del número medio de calorías diarias ingeridas.
- El peso de las aves en función de su envergadura y de su longitud.
- El nivel medio de contaminación en una región en función de las precipitaciones medias anuales y de su índice de industrialización.
- La presión atmosférica en un determinado lugar en función de su longitud y de su latitud.
- El número de presas devoradas por un depredador (en un tiempo fijado) en función de la densidad de presas y del tiempo necesario para cazar cada una de ellas.

El modelo matemático adecuado para expresar una variable en función de otras variables es la **función de varias variables**. Igual que ocurría con las funciones de una variable, algunas de las herramientas asociadas a este modelo nos permiten abordar y expresar muchos aspectos interesantes de la relación existente. Nos centraremos en las herramientas más sencillas: curvas de nivel y derivadas parciales.

2 Función de dos variables

En general, estaremos interesados en representar una variable Z en función de n variables. Sin embargo, la notación se complica bastante cuando $n > 2$. Por este motivo, la exposición de los conceptos la vamos a hacer con $n = 2$. Las ideas se podrían después extender a $n > 2$.

Definición.- Una función de dos variables, $z = f(x, y)$, es el modelo matemático que nos dice cuál es el valor de la variable Z para cada posible valor de las variables X e Y. $\bullet$

3 Curvas de nivel

Es posible hacer una representacion completa de una función $z = f(x, y)$ en tres dimensiones. Sin embargo, muy a menudo, se recurre a representar este tipo de funciones mediante sus curvas de nivel, porque son sencillas de interpretar y mucho más fáciles de representar.

Definición.- La curva de nivel c de una función $z = f(x, y)$ está formada por el conjunto de puntos (x, y) en el plano, tales que $f(x, y) = c$. •

Una curva de nivel presentada aisladamente no proporciona mucha información sobre la función de la que procede. Lo interesante es presentar un conjunto de curvas de nivel para valores equidistantes de c. Por ejemplo, eligiendo $c = 0, 1, 2, ...$, eligiendo $c = 0, -0, 2, -0, 4, ...$ Los valores concretos que elijamos para c dependerán de la función que queramos estudiar. Por ejemplo, la mayor o menor proximidad de las curvas de nivel nos proporcionará información sobre la mayor o menor pendiente de la función. Las curvas de nivel constituyen el recurso habitualmente utilizado en los mapas topográficos para representar la altitud en función de la longitud y de la latitud, y en los mapas de isobaras para representar la presión atmosférica en función también de la longitud y de la latitud.

Ejemplo 1.- Consideramos la función $z = f(x, y) = x^2 + y^2$.
Si representamos sus curvas de nivel $c = 0, 1, 2, 3, ...$, veremos que vamos obteniendo círculos concéntricos con radio $r = 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ...$

4 Derivadas parciales, máximos y mínimos

Uno de los objetivos importantes al trabajar con funciones de una variable era determinar sus máximos y mínimos relativos. Este problema se abordaba mediante la utilización de las derivadas.

Cuando trabajamos con una función de varias variables, nos encontramos, con gran frecuencia, con el mismo problema de determinar sus máximos y mínimos relativos. También vamos a abordar este problema a través de las derivadas con la diferencia de que, en este caso, tenemos más variables, y tendremos que tratar con las llamadas derivadas parciales. Las más sencillas, las derivadas parciales de primer orden, se definen a continuación:

Definición.- La **derivada parcial de primer orden de la función** $z = f(x, y)$ **con respecto a** x se define como:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \ .$$

De manera análoga, la **derivada parcial de primer orden de la función** $z = f(x, y)$ **con respecto a** y se define como:

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} \ . \qquad \bullet$$

Destacamos dos cosas:

Procedimiento para la obtención de las derivadas parciales de primer orden:

Cuando queremos obtener la derivada parcial de primer orden de una función con respecto a x, lo que tenemos que hacer es, simplemente, derivar la funcíón como si la única variable fuera x, considerando y como una constante. De manera análoga procederíamos para la obtención de la derivada parcial de primer orden con respecto a y.

De este modo, la obtención de derivadas parciales es algo muy sencillo: aplicamos las reglas habituales de la derivación, teniendo cuidado de considerar la variable que no nos interesa como una constante.

Significado e interpretación de las derivadas parciales de primer orden:

El significado e interpretación de las derivadas parciales de primer orden es similar al de las derivadas de funciones de una variable. Asi, por ejemplo, la derivada parcial de primer orden de la función $z = f(x, y)$ con respecto a x representa la velocidad de variación de la variable Z con respecto a X (manteniendo fija la variable Y). En particular, cuando $\frac{\partial f}{\partial x}$ es positiva, significa que Z aumenta al aumentar X (permaneciendo Y constante); cuando $\frac{\partial f}{\partial x}$ es negativa, significa que Z disminuye al aumentar X (permaneciendo Y constante). Obsérvese que lo que estamos haciendo es trabajar, no con toda la función, sino solamente con una sección de ella (la que corresponde al valor fijo de Y). Análogas consideraciones se pueden hacer con la otra derivada parcial.

Ejemplo 1 (continuado).- Consideramos nuevamente la función $f(x, y) = x^2 + y^2$. Sus derivadas parciales de primer orden son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \end{aligned}$$

Ejemplo 2.- Consideramos la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$. Sus derivadas parciales de primer orden son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \end{aligned}$$

Ejemplo 3.- Consideramos la función $f(x, y) = x^2 - y^2$. Sus derivadas parciales de primer orden son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2y \end{aligned}$$

Ejemplo 4.- La función de Holling se utiliza en Ecología para expresar el número P de presas devoradas por un depredador (en un intervalo de tiempo fijado T_0), en función de dos variables: la densidad de presas disponibles, N, y el tiempo de caza, C, que necesita para perseguir, dominar, consumir y digerir cada presa:

$$P = f(N, C) = \frac{aNT_0}{1 + aCN}$$

La constante a es una constante positiva, que se suele interpretar como la tasa de ataque del depredador.

El significado intuitivo de las derivadas parciales se ilustra de manera sencilla con esta función:

(a) ¿Cómo afecta al número de presas devoradas un aumento del tiempo dedicado a cada presa?

Lo que queremos saber es si el valor de la variable P aumenta o disminuye al aumentar C (manteniéndose constante el valor de la otra variable, N). Es decir, queremos saber si P es función creciente o decreciente de C (para N fijo). Para responder a esto, calculamos la derivada parcial correspondiente:

$$P_C(N,C) = \frac{\partial f}{\partial C} = -\frac{a^2N^2T_0}{(1+aCN)^2} < 0$$

El hecho de que esta derivada sea negativa nos dice que el número de presas devoradas disminuye al aumentar el tiempo, C, dedicado a cada presa (lo cual es muy razonable).

(b) ¿Cómo afecta al número de presas devoradas un incremento de la densidad de presas?

Lo que queremos saber ahora es si el valor de la variable P aumenta o disminuye al aumentar N (manteniéndose constante el valor de la otra variable, C). Es decir, queremos saber si P es función creciente o decreciente de N (para C fijo). Para responder a esto, calculamos la derivada parcial correspondiente:

$$\begin{aligned} P_N(N,C) &= \frac{\partial f}{\partial N} = \frac{aT_0(1+aCN) - aNT_0(aC)}{(1+aCN)^2} \\ &= \frac{aT_0}{(1+aCN)^2} > 0 \end{aligned}$$

El hecho de que esta derivada sea positiva nos dice que el número de presas devoradas aumenta al aumentar el número de presas disponibles, N (lo cual es también muy razonable).

(c) Finalmente, si estuviéramos interesados en representar, por ejemplo, el número de presas devoradas, P, en función de la densidad de presas, N, en un intervalo de $T_0 = 24$ horas, cuando el tiempo dedicado a cazar cada presa es $C = 0,2$ horas y la tasa de ataque del depredador es $a = 1$, todo quedaría reducido a representar la siguiente función de una variable:

$$P = f(N) = \frac{24N}{1+0,2N} \qquad \bullet$$

Naturalmente, igual que en las funciones de una variable podíamos derivar más veces, ahora podemos derivar también más veces, obteniendo las derivadas parciales de segundo orden o de órdenes superiores. Para esto, lo único que tenemos que dejar claro es el orden en el que derivamos, y con respecto a qué variable derivamos. En partícular, las **derivadas parciales de segundo orden** son útiles a la hora de calcular máximos y mínimos relativos. En principio, tendríamos cuatro derivadas parciales de segundo orden:

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

Conviene destacar que, cuando trabajamos con funciones suaves, da lo mismo que derivemos primero con respecto a x y luego con respecto a y, o al revés, ya que las dos derivadas mixtas coinciden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

<u>Determinación de máximos y mínimos locales y puntos de silla</u>

La aplicación que más nos va a interesar de las derivadas parciales es su utilización para determinar máximos y mínimos locales o relativos, así como puntos de silla (que reemplazan a los puntos de inflexión en estas funciones). El nombre de punto de silla procede de que la función, en uno de esos puntos, tiene una forma similar a la de las sillas de montar a caballo. Los pasos que tendremos que dar son los siguientes:

1. Obtenemos las derivadas parciales de primer orden, $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$, y planteamos y resolvemos el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x} & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & 0 \end{array}\right\}$$

   Los puntos que obtengamos como soluciones de este sistema serán los candidatos a ser máximos locales, mínimos locales o puntos de silla. Llamaremos (x_0, y_0) a cualquier punto que sea solución del sistema anterior.

2. Obtenemos las derivadas parciales de segundo orden y calculamos:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \right)^2 \end{aligned}$$

3. Tenemos las siguientes posibilidades:

   - Si $D > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, entonces tenemos un mínimo local en (x_0, y_0).
   - Si $D > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, entonces tenemos un máximo local en (x_0, y_0).
   - Si $D < 0$, entonces tenemos un punto de silla en (x_0, y_0).
   - En los restantes casos, no podemos sacar conclusiones.

Ejemplo 1 (continuado).- Consideramos nuevamente la función $f(x, y) = x^2 + y^2$.

1. Obtenemos las derivadas parciales de primer orden, las igualamos a cero, y resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y = 0 \end{aligned}$$

   La única solución de este sistema es $x = 0$, $y = 0$.

2. Obtenemos las derivadas parciales de segundo orden:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} [2x] = 2$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} [2y] = 2$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial y} [2x] = 0$$

y calculamos:

$$\begin{aligned}
D &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)\right)^2 \\
&= (2)(2) - (0)^2 = 4
\end{aligned}$$

3. Tenemos, $D = 4 > 0$, y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0$. Por tanto, en el punto $(0,0)$ tenemos un mínimo local. •

Ejemplo 2 (continuado).- Consideramos nuevamente la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$.

1. Obtenemos las derivadas parciales de primer orden, las igualamos a cero, y resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 2 = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 2y = 0
\end{aligned}$$

   La única solución de este sistema es $x = 1$, $y = 0$.

2. Obtenemos las derivadas parciales de segundo orden:

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}[2x-2] = 2$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}[2y] = 2$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial y}[2x-2] = 0$$

   y calculamos:

$$\begin{aligned}
D &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,0)\right)^2 \\
&= (2)(2) - (0)^2 = 4
\end{aligned}$$

3. Tenemos, $D = 4 > 0$, y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 2 > 0$. Por tanto, en el punto $(1,0)$ tenemos un mínimo local. •

Ejemplo 3 (continuado).- Consideramos nuevamente la función $f(x,y) = x^2 - y^2$.

1. Obtenemos las derivadas parciales de primer orden, las igualamos a cero, y resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2y = 0 \end{aligned}$$

   La única solución de este sistema es $x = 0$, $y = 0$.

2. Obtenemos las derivadas parciales de segundo orden:

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}[2x] = 2$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}[-2y] = -2$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial y}[2x] = 0$$

   y calculamos:

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)\right)^2 \\ &= (2)(-2) - (0)^2 = -4 \end{aligned}$$

3. Tenemos, $D = -4 < 0$. Por tanto, en el punto $(0,0)$ tenemos un punto de silla. $\bullet$