INTEGRACIÓN

Julián de la Horra
Departamento de Matemáticas U.A.M.

1 Introducción

En este capítulo vamos a abordar y estudiar el concepto de integral definida. Empezaremos planteando algunos ejemplos sencillos que surgen en las Ciencias Experimentales, y que servirán de motivación:

Primer ejemplo.- Estamos interesados en el estudio de una población de una especie determinada en cierto hábitat. Conocemos (aproximadamente) la velocidad a la que varía el número de ejemplares de esta población a lo largo del tiempo. Disponiendo de esta información, ¿seremos capaces de decir (aproximadamente) cuál es la diferencia de población entre dos instantes determinados? La integral definida será la herramienta que nos permitirá dar respuesta a este problema.

Segundo ejemplo.- Estamos interesados en el estudio de una partícula en movimiento a lo largo de un eje. Conocemos (aproximadamente) la velocidad a la que se mueve esta partícula. Disponiendo de esta información, ¿seremos capaces de decir (aproximadamente) cuál es la diferencia de posición de la partícula entre dos instantes determinados? Nuevamente, la integral definida será la herramienta que nos permitirá dar respuesta a este problema.

En la siguiente sección, se introducirá el concepto de integral definida. Una vez que hayamos presentado este concepto, nos surgirá el problema de cómo calcular las integrales definidas. El cálculo de integrales definidas se puede abordar de dos maneras. En primer lugar, podemos recurrir al concepto de primitiva que nos permite calcular las integrales definidas de manera exacta; en la Sección 3 se repasarán algunos métodos sencillos para obtener primitivas. En segundo lugar, podemos recurrir a métodos sencillos para calcular, de forma aproximada, las integrales definidas: la regla del trapecio y la regla de Simpson (Sección 4). Finalmente, pasaremos a las aplicaciones, que son nuestro objetivo fundamental: cálculo de áreas, problemas con móviles, dinámica de poblaciones (Sección 5) y resolución de ecuaciones diferenciales con variables separables (Sección 6).

2 Concepto de integral definida

Vamos a introducir el concepto de integral definida a partir del problema del cálculo de áreas ya que (aparte de que así es como surgió históricamente) este tipo de enfoque permite una presentación gráfica muy sencilla de comprender.

Empezamos considerando una función de una variable $y = f(x)$ definida sobre el intervalo $[a, b]$ y que toma valores positivos. Queremos calcular el área comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas, $X = a$ y $X = b$ (ver Figura 1).

El problema se aborda, desde un punto de vista teórico, mediante las sumas inferiores y superiores, que utilizan rectángulos con bases cada vez más estrechas y que, intuitivamente, nos van dando el área requerida cada vez con mayor precisión (ver Figura 2).

Definición.- Consideramos una función continua $y = f(x)$ definida sobre el intervalo $[a, b]$. En este caso, se puede probar que el supremo de las sumas inferiores coincide con el ínfimo de las sumas superiores, y este número común recibe el nombre de **integral definida** de $y = f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$, y se representa por

$$\int_a^b f(x)dx \qquad \bullet$$

Las funciones con las que habitualmente se trabaja en las Ciencias Experimentales son funciones continuas y, por tanto, tendrá sentido hablar de su integral definida. Si la función $y = f(x)$ toma valores positivos sobre $[a, b]$, esta integral definida proporciona el área encerrada entre la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas, $X = a$ y $X = b$. Cuando la función sea positiva en unos trozos y negativa en otros habrá que tener un poco de cuidado para calcular áreas, como veremos más adelante.

3 Soluciones exactas

Las sumas inferiores y superiores son necesarias para la formalización matemática del concepto pero, si se quiere aplicar ese proceso al cálculo efectivo de integrales definidas, nos encontramos con que dicho proceso es tedioso en los casos sencillos e inaplicable en los casos complicados. Afortunadamente, existen procedimientos sencillos, basados en una maravillosa y sorprendente relación que existe entre derivación e integración.

Definición.- Se llama **primitiva** (o antiderivada) de una función $y = f(x)$ a otra función, $F(x)$, tal que $F'(x) = f(x)$. $\bullet$

La utilidad de las primitivas procede del siguiente resultado:

Teorema.- Consideramos una función continua $y = f(x)$ definida sobre el intervalo $[a, b]$. Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad \bullet$$

Esta relación entre integrales definidas y primitivas es la que motiva la notación de la integral indefinida para expresar que $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Obsérvese que, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, $F(x) + C$, obviamente, también lo es.

El resultado anterior motivó la proliferación de métodos de integración encaminados a obtener primitivas de funciones porque, de ese modo, se resolvía el problema de calcular integrales definidas.

En esta sección, recordaremos algunos métodos sencillos para obtener primitivas. En todos ellos, se trata de reducir la integral a otra u otras que sean inmediatas.

Sustitución o cambio de variable

El método de sustitución o cambio de variable es uno de los más utilizados. A grandes rasgos, consiste en lo siguiente:

a) Queremos obtener una primitiva de $f(x)$, es decir, queremos calcular la integral indefinida $\int f(x)dx$, pero no es inmediata.

b) Definimos una nueva variable, $u = g(x)$. Recordando la relación de las diferenciales con las derivadas, tenemos:

$$u' = g'(x) = \frac{du}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{du}{g'(x)}$$

c) Sustituimos x y dx en $\int f(x)dx$, con el objetivo de obtener una nueva integral indefinida que quede expresada solamente en función de la nueva variable u. Si la nueva integral indefinida es inmediata, la resolvemos, y deshacemos el cambio, para dejar la primitiva expresada en función de x.

Ejemplo 1.- Queremos obtener una primitiva de la función $y = \frac{1}{x \ln x}$, es decir, queremos resolver la integral indefinida:

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx.$$

Con el objetivo de tratar de conseguir una integral inmediata, definimos una nueva variable, $u = \ln x$. Tenemos:

$$u' = \frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad dx = xdu$$

Sustituimos:

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{xu} xdu = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C = \ln |\ln x| + C \qquad \bullet$$

Integración por partes

El método de integración por partes es también muy utilizado. A grandes rasgos, consiste en lo siguiente:

a) Queremos obtener una primitiva de $f(x)$, es decir, queremos calcular la integral indefinida $\int f(x)dx$, pero no es inmediata.

b) Factorizamos $f(x)dx$ de una manera alternativa:

$$\int f(x)dx = \int udv$$

c) El método de integración por partes, propiamente dicho, se basa en el siguiente resultado:

$$\int f(x)dx = \int udv = uv - \int vdu$$

Para que este método funcione, en la práctica, tenemos que ser capaces de obtener:

$$du \text{ (que es trivial)}, \qquad v = \int dv \qquad \text{y} \qquad \int vdu.$$

En caso afirmativo, lo único que queda es deshacer los cambios, para dejar la primitiva expresada en función de x.

Ejemplo 2.- Queremos obtener una primitiva de la función $y = xe^x$, es decir, queremos resolver la integral indefinida:

$$\int xe^x dx$$

Factorizamos $xe^x dx$ de una manera alternativa:

$$\int xe^x dx = \int (x)(e^x dx) = \int u dv,$$

siendo $u = x$ y $dv = e^x dx$.

Tenemos:

$u = x \quad \Rightarrow \quad u' = 1 = \frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad du = dx,$

$dv = e^x dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dv = \int e^x dx = e^x.$

Tenemos, por tanto:

$$\int xe^x dx = \int u dv = uv - \int v du = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C \qquad \bullet$$

Descomposición en fracciones simples

Este es un método que podemos utilizar cuando queremos hallar la primitiva de un cociente de dos polinomios, siendo el grado del numerador menor que el del denominador. El objetivo del método es descomponer el cociente de polinomios en suma de fracciones simples que sean inmediatas de integrar. En vez de hacer una exposición teórica de este método, veremos como se utiliza mediante dos ejemplos sencillos.

Ejemplo 3.- Queremos obtener una primitiva de la función $y = \frac{2x}{(x+1)(x-2)}$, es decir, queremos resolver la integral indefinida:

$$\int \frac{2x}{(x+1)(x-2)} dx.$$

En este ejemplo, el denominador es un polinomio de grado 2 con dos raíces reales simples, $x = -1$ y $x = 2$. En este caso, el cociente de polinomios admite una descomposición de la siguiente forma:

$$\frac{2x}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

El siguiente paso es determinar el valor de los coeficientes A y B:

$$\begin{aligned} \frac{2x}{(x+1)(x-2)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x+1)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{(A+B)x + (B-2A)}{(x+1)(x-2)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} A+B &=& 2 \\ B-2A &=& 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} A &=& 2/3 \\ B &=& 4/3 \end{array}\right.$$

Una vez que disponemos de los valores de A y B, el resto es sencillo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x}{(x+1)(x-2)}dx &= \int \left[\frac{2/3}{x+1} + \frac{4/3}{x-2}\right] dx \\
&= \frac{2}{3}\ln|x+1| + \frac{4}{3}\ln|x-2| + C \qquad \bullet
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.- Queremos obtener una primitiva de la función $y = \frac{2x}{(x+1)^2(x-2)}$, es decir, queremos resolver la integral indefinida:

$$\int \frac{2x}{(x+1)^2(x-2)}dx.$$

En este ejemplo, el denominador es un polinomio de grado 3 con una raíz real doble, $x = -1$, y una raíz real simple, $x = 2$. En este caso, el cociente de polinomios admite una descomposición de la siguiente forma:

$$\frac{2x}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2}$$

El siguiente paso es determinar el valor de los coeficientes A, B y C:

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{(x+1)^2(x-2)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2} \\
&= \frac{A(x+1)(x-2) + B(x-2) + C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-2)} \\
&= \frac{(A+C)x^2 + (-A+B+2C)x + (-2A-2B+C)}{(x+1)^2(x-2)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} A+C &=& 0 \\ -A+B+2C &=& 2 \\ -2A-2B+C &=& 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} A &=& -4/9 \\ B &=& 2/3 \\ C &=& 4/9 \end{array}\right.$$

Una vez que disponemos de los valores de A, B y C, el resto es sencillo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x}{(x+1)^2(x-2)}dx &= \int \left[\frac{-4/9}{x+1} + \frac{2/3}{(x+1)^2} + \frac{4/9}{x-2}\right] dx \\
&= -\frac{4}{9}\ln|x+1| + \frac{4}{9}\ln|x-2| + \frac{2}{3}\int \frac{1}{(x+1)^2} \\
&= -\frac{4}{9}\ln|x+1| + \frac{4}{9}\ln|x-2| - \frac{2}{3}\frac{1}{x+1} + C.
\end{aligned}$$

La última integral indefinida, $\int \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1}$, es bastante inmediata, pero se puede facilitar su cálculo definiendo $u = x + 1$ y aplicando el método de cambio de variable. $\bullet$

El método de descomposición en fracciones simples se complica cuando aparecen raíces imaginarias en el denominador. Estos casos más complicados, junto con otros métodos de obtención de primitivas, se pueden encontrar en los libros dedicados a este objetivo. Aquí no vamos a profundizar más en dichos métodos porque nuestro objetivo es obtener el valor de integrales definidas y en la próxima sección veremos que esto se puede hacer, de forma aproximada, con métodos muy sencillos.

4 Soluciones aproximadas

Como se ha dicho desde el principio del capítulo, nuestro objetivo es hallar el valor de integrales definidas, $\int_a^b f(x)dx$, donde $f(x)$ es una función continua. En aquellos casos en que podemos encontrar una primitiva, $F(x)$, de la función $f(x)$, el problema queda resuelto. Pero, en muchas ocasiones, encontrar una primitiva no es posible o es francamente complicado. Además, también en muchas ocasiones, es más que suficiente para nuestros propósitos obtener el valor aproximado de $\int_a^b f(x)dx$. Veremos a continuación dos procedimientos numéricos sencillos que dan soluciones aproximadas para una integral definida.

Regla del trapecio

Consideramos una función continua, $y = f(x)$, y queremos calcular, aproximadamente, $\int_a^b f(x)dx$. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en varios subintervalos, todos ellos con la misma longitud h. Como se puede ver en la Figura 3, el área que se obtiene con la integral definida queda muy aproximada por la suma de las áreas de los trapecios representados en la figura.

El área de cada uno de los trapecios es la semisuma de las bases por la altura, de modo que tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\simeq A_1 + A_2 + ... + A_n \\
&= \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}h + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}h + ... + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}h \\
&= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]
\end{aligned}$$

La expresión que acabamos de obtener recibe el nombre de **regla del trapecio** y sirve para calcular, aproximadamente, una integral definida.

Regla de Simpson

La regla de Simpson proporcionará otra aproximación al valor de una integral definida. Su obtención es algo más complicada que la regla del trapecio, pero es algo más precisa, y la regla que resulta al final es también muy sencilla de aplicar.

Consideramos nuevamente una función continua, $y = f(x)$, y queremos calcular, aproximadamente, $\int_a^b f(x)dx$.

Detalles técnicos de la obtención de la regla de Simpson:

Para empezar, dividimos el intervalo $[a, b]$ en dos subintervalos con la misma longitud h, y trasladamos todo el recinto sobre el eje horizontal hasta dejarlo centrado en el origen (ver Figura 4). Los dos recintos tienen la misma superficie.

A continuación, consideramos un polinomio de grado 3, $a + bx + cx^2 + dx^3$, que pase por los puntos $(-h, g(-h))$, $(0, g(0))$ y $(h, g(h))$, de modo que tenemos:

$$\begin{aligned} a - bh + ch^2 - dh^3 &= g(-h) = f(x_0) \\ a &= g(0) = f(x_1) \\ a + bh + ch^2 + dh^3 &= g(h) = f(x_2) \end{aligned} \qquad (1)$$

Al exigir que ese polinomio de grado 3 pase por esos tres puntos, estamos consiguiendo que su gráfica sea "parecida" a la de $g(x)$, y tenemos:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_{-h}^{h} g(x)dx \simeq \int_{-h}^{h} [a + bx + cx^2 + dx^3]dx \\ &= \left[ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3} + d\frac{x^4}{4}\right]_{-h}^{h} = 2ah + 2c\frac{h^3}{3} \\ &= \frac{h}{3}[6a + 2ch^2] \end{aligned}$$

Finalmente, comprobaremos que

$$\frac{h}{3}[6a + 2ch^2] = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)].$$

En efecto, utilizando (1), tenemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] \\
= & \frac{h}{3}[(a-bh+ch^2-dh^3)+4(a)+(a+bh+ch^2+dh^3)] \\
= & \frac{h}{3}[6a+2ch^2]
\end{aligned}$$

Por tanto, hemos obtenido:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]$$

Si ahora dividimos el intervalo $[a,b]$ en cuatro subintervalos con la misma longitud h (ver Figura 5), tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \\
&\simeq \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] + \frac{h}{3}[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)] \\
&= \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]
\end{aligned}$$

En general, si dividimos el intervalo $[a,b]$ en un número par de subintervalos, todos ellos con la misma longitud h, obtenemos la **regla de Simpson**:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+...+4f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

Obsérvese que tanto la regla del trapecio como la regla de Simpson son muy sencillas de aplicar: no necesitamos obtener primitivas, no necesitamos obtener derivadas, sólo necesitamos calcular el valor de la función $f(x)$ en unos cuantos puntos.

Aplicamos la regla de Simpson en los dos siguientes ejemplos para ilustrar, tanto la sencillez de su utilización, como la calidad de la aproximación que proporciona.

Ejemplo 5.- Supongamos que queremos calcular la siguiente integral definida:

$$\int_{30}^{50} f(x)dx = \int_{30}^{50} (0,1)e^{-(0,1)x}dx$$

Este tipo de integrales tendrá mucho interés aplicado al utilizar el modelo Exponencial como modelo de Probabilidad. De momento, se trata simplemente de una integral definida.

En este caso, podemos proceder de dos formas:

Cálculos aproximados

Por ejemplo, podemos aplicar la regla del trapecio con 4 subintervalos:

$$\begin{aligned}
\int_{30}^{50} f(x)dx &= \int_{30}^{50} (0,1)e^{-(0,1)x}dx \\
&= \simeq \frac{5}{2}[f(30) + 2f(35) + 2f(40) + 2f(45) + f(50)] \\
&= \frac{5}{2}[0,0050 + 2(0,0030) + 2(0,0018) + 2(0,0011) + 0,0007] \\
&= 0,0438 \simeq 0,04
\end{aligned}$$

También podemos aplicar la regla de Simpson con 4 subintervalos:

$$\begin{aligned}
\int_{30}^{50} f(x)dx &= \int_{30}^{50} (0,1)e^{-(0,1)x}dx \\
&= \simeq \frac{5}{3}[f(30) + 4f(35) + 2f(40) + 4f(45) + f(50)] \\
&= \frac{5}{3}[0,0050 + 4(0,0030) + 2(0,0018) + 4(0,0011) + 0,0007] \\
&= 0,0428 \simeq 0,04
\end{aligned}$$

Cálculo exacto

En este caso, la integral definida se puede evaluar de forma exacta de manera muy sencilla:

$$\int_{30}^{50} f(x)dx = \int_{30}^{50} (0,1)e^{-(0,1)x}dx = \left[-e^{-(0,1)x}\right]_{30}^{50} = 0,0431 \simeq 0,04$$

Como se puede apreciar, la diferencia entre el resultado exacto y los resultados aproximados es mínima. Teniendo en cuenta que cualquier modelo que empleemos en las Ciencias Experimentales nunca será una descripción exacta de la realidad sino (en el mejor de los casos) una buena aproximación, los resultados aproximados aportados por la regla del trapecio y por la regla de Simpson (utilizando sólo 4 subintervalos) son magníficos. •

Ejemplo 6.- Supongamos ahora que queremos calcular la siguiente integral definida:

$$\int_{260}^{300} f(x)dx = \int_{260}^{300} \frac{1}{20\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2(20)^2}(x-240)^2} dx$$

Este tipo de integrales tendrá mucho interés aplicado al utilizar el modelo Normal como modelo de Probabilidad. De momento, se trata simplemente de una integral definida.

Podemos aplicar la regla de Simpson con 4 subintervalos, y tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{260}^{300} f(x)dx &= \int_{260}^{300} \frac{1}{20\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2(20)^2}(x-240)^2} dx \\
&= \simeq \frac{10}{3}[f(260) + 4f(270) + 2f(280) + 4f(290) + f(300)] \\
&= \frac{10}{3}[0,0121 + 4(0,0065) + 2(0,0027) + 4(0,0009) + 0,0002] \\
&= 0,1577 \simeq 0,16
\end{aligned}$$

En este caso, nos tenemos que conformar con una solución aproximada pero, como se ha puesto de manifiesto en el ejemplo anterior, esto no suele ser un problema. •

5 Aplicaciones de la integral definida

En esta sección, vamos a estudiar varias aplicaciones de la integral definida, es decir, algunos problemas concretos en los que la solución al problema se obtiene mediante la utilización de la integral definida.

<u>**Cálculo de áreas**</u>

Primer caso: Área entre una función positiva y el eje de abscisas.

Este es el problema con el que hemos iniciado el capítulo para motivar la necesidad del concepto de integral definida. Como ya hemos dicho, tenemos:

"Área entre $y = f(x)$ (positiva), el eje de abscisas, $X = a$ y $X = b$"

$= \int_a^b f(x)dx$.

Segundo caso: Área entre una función cualquiera y el eje de abscisas.

Ahora queremos determinar el área comprendida entre una función cualquiera $y = f(x)$, el eje de abscisas, $X = a$ y $X = b$ (ver Figura 6).

Tenemos:

"Área entre $y = f(x)$, el eje de abscisas, $X = a$ y $X = b$"

$= A_1 + A_2 = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b [-f(x)]dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$

Tercer caso: Área entre dos funciones.

Ahora queremos calcular el área comprendida entre las funciones $y = f(x)$ e $Y = g(x)$ (ver Figura 7).

Tenemos:

"Área entre $y = f(x)$, $y = g(x)$, $X = a$ y $X = b$"$=A_1 + A_2$

$= \left[\int_a^c f(x)dx - \int_a^c g(x)dx\right] + \left[\int_c^b g(x)dx - \int_c^b f(x)dx\right]$

Diferencia de posición de un móvil entre dos instantes

Consideramos una partícula o un objeto que se mueve (un móvil) a lo largo de un eje con una velocidad $v(t)$, y queremos calcular la diferencia de posición de este móvil entre dos instantes $t = a$ y $t = b$.

Llamaremos $P = P(t)$ a la función que describe la posición que ocupa el móvil a lo largo del eje en función del tiempo. Recordemos que, en Física, $v(t)$ es la velocidad de variación de la posición $P(t)$. Por lo tanto, $P'(t) = v(t)$, es decir, $P(t)$ es una primitiva de $v(t)$. Por lo tanto, aplicando el resultado que relaciona las primitivas con la integral definida, tenemos:

"Diferencia de posición entre $t = a$ y $t = b$"

$= P(b) - P(a) = \int_a^b v(t)dt.$

Diferencia de población entre dos instantes

Consideramos una población en la que el número de individuos varía con una velocidad $v(t)$ a lo largo del tiempo. Esta velocidad será positiva (cuando la población aumenta) o negativa (cuando la población disminuye). Queremos calcular la diferencia de población entre dos instantes $t = a$ y $t = b$.

Este problema es análogo al de calcular la diferencia de posición de un móvil, sólo que en este caso estamos interesados en la variable que representa el número de individuos de esa población (en vez de interesarnos por la posición del móvil).

Llamaremos $N = N(t)$ a la función que representa el número de individuos de la población en el instante t. Por lo tanto, $N'(t) = v(t)$, es decir, $N(t)$ es una primitiva de $v(t)$. Por lo tanto, aplicando el resultado que relaciona las primitivas con la integral definida, tenemos:

“Diferencia de población entre los instantes $t = a$ y $t = b$”

$= N(b) - N(a) = \int_a^b v(t)dt$.

<u>Distancia total recorrida por un móvil entre dos instantes</u>

Primer caso: Distancia total recorrida por un móvil, cuando la velocidad es siempre positiva.

Consideramos un objeto que se mueve (un móvil) con una velocidad $v(t) \geq 0$, y queremos calcular la distancia total recorrida por este móvil entre dos instantes $t = a$ y $t = b$.

Volvemos a llamar $P(t)$ a la función que describe la posición que ocupa dicho móvil en función del tiempo. Recordemos que $v(t)$ sigue siendo la velocidad de variación de la posición $P(t)$. Por lo tanto, $P'(t) = v(t)$, es decir, $P(t)$ es una primitiva de $v(t)$. Además, como la velocidad es siempre positiva, la distancia total reccorrida por el móvil coincide con la diferencia de posición. En definitiva, tenemos:

$D=$“Distancia total recorrida entre $t = a$ y $t = b$”

$=$“Diferencia de posición entre $t = a$ y $t = b$”$= P(b) - P(a) = \int_a^b v(t)dt$.

La situación gráfica se puede ver en la Figura 8.

Segundo caso: Distancia total recorrida por un móvil, cuando la velocidad es cualquiera.

En este caso, la situación gráfica es del tipo mostrado en la Figura 9. Desde un punto de vista técnico, se trata exactamente del mismo problema que abordamos en el segundo caso del cálculo de un área, cuando la función es positiva en una parte y negativa en otra. Por supuesto, el problema se resuelve de la misma forma:

$D=$“Distancia total recorrida entre $t = a$ y $t = b$”$=D_1 + D_2$

$= \int_a^c v(t)dt + \int_c^b [-v(t)]dt = \int_a^c v(t)dt - \int_c^b v(t)dt$.

6 Ecuaciones diferenciales con variables separables

En diferentes situaciones que aparecen con frecuencia en las Ciencias Experimentales, es complicado poder escribir directamente la función $y = f(x)$ que expresa una variable Y en términos de otra variable X pero, sin embargo, lo que se tiene a menudo es un conocimiento (quizá aproximado) de la velocidad de variación de Y en función de X. Los conceptos y herramientas que hemos estudiado en este capítulo pueden utilizarse para obtener (o reconstruir) la función $y = f(x)$ a partir de esa velocidad de variación, en las situaciones más sencillas. A continuación, se describe el problema que vamos a abordar:

Deseamos obtener la función $y = f(x)$ que expresa la variable Y en términos de la variable X, conociendo:

1. La **velocidad de variación** de Y con respecto a X que, en este caso, supondremos que es de la forma $v(x, y) = g(x)h(y)$.

   Es decir, la función que expresa la velocidad de variación se puede **separar** en un producto de dos funciones: una función que depende sólo de X y otra función que depende sólo de Y. Esta separación es la que motiva el nombre técnico de **ecuación diferencial de variables separables**.

2. Un **dato o valor inicial**: cuando $X = x_0$, $Y = y_0$.

   Es decir, $y_0 = f(x_0)$ es un punto de la función que se está buscando.

A grandes rasgos, el procedimiento para resolver esta **ecuación diferencial con variables separables** se puede esbozar de la siguiente forma:

a) En primer lugar, plantearemos la **ecuación diferencial**. Para esto, recordemos que la velocidad de variación de Y con respecto a X no es otra cosa que la derivada de Y con respecto a X, y recordemos también la notación de las diferenciales en relación con las derivadas:

$$\begin{aligned} \text{“Velocidad de variación de } Y \text{ con respecto a } X\text{”} &= y' = \frac{dy}{dx} \\ &= v(x, y) = g(x)h(y). \end{aligned}$$

En consecuencia, la ecuación diferencial sería:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y).$$

b) A continuación, “separamos” las variables e integramos:

$$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx$$

Después, resolvemos las integrales indefinidas (si sabemos), y despejamos Y. Nos quedará algo del tipo:

$$y = F(x) + C,$$

donde C es la constante aditiva de integración que surge al obtener las integrales indefinidas.

c) Finalmente, determinamos el valor de la constante de integración C. Esto se consigue sustituyendo el dato o valor inicial en la función $y = F(x)+C$ que hemos obtenido, y despejando C.

Es muy conveniente ver algunos ejemplos de este procedimiento que se acaba de esbozar de manera muy general. Los dos primeros ejemplos van dirigidos a explicar la técnica. El tercer ejemplo va dirigido, no sólo a explicar la técnica, sino también a aprender a abordar los problemas reales de las Ciencias Experimentales.

Ejemplo 7.- La velocidad de variación de Y en función del tiempo T viene dada por $v(t) = t(1-t)$. Además, se sabe que cuando $T = 0$, $Y = -2$. Hallar la función $y = f(t)$ que expresa Y en función del tiempo.

a) En primer lugar, planteamos la ecuación diferencial:

$$y' = \frac{dy}{dt} = v(t) = t(1-t) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dt} = t(1-t)$$

b) A continuación, separamos las variables (lo cual es especialmente sencillo en este caso), e integramos:

$$dy = t(1-t)dt \qquad \Rightarrow \qquad \int dy = \int t(1-t)dt$$

Ahora, resolvemos las integrales indefinidas (la primera con respecto a Y, y la segunda con respecto a T):

$\int dy = y$
$\int t(1-t)dt = \int (t-t^2)dt = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}$

Por tanto, tenemos: $y = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + C$.

c) Finalmente, tenemos que determinar el valor de la constante C. Para esto, utilizaremos el dato o valor inicial: cuando $T = 0$, $Y = -2$. Tenemos:

$$-2 = \frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} + C \qquad \Rightarrow \qquad C = -2$$

En definitiva, la función que expresa Y en función de T sería:

$$y = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - 2 \qquad \bullet$$

Ejemplo 8.- La velocidad de variación de Y en función de X viene dada por $v(x, y) = xy$. Además, se sabe que cuando $X = 0$, $Y = 1$. Hallar la función $y = f(x)$.

a) En primer lugar, planteamos la ecuación diferencial:

$$y' = \frac{dy}{dx} = v(x, y) = xy \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = xy$$

b) A continuación, separamos las variables, e integramos:

$$\frac{1}{y}dy = xdx \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{1}{y}dy = \int xdx$$

Ahora, resolvemos las integrales indefinidas (la primera con respecto a Y, y la segunda con respecto a X):

$\int \frac{1}{y}dy = \ln y$
$\int xdx = \frac{x^2}{2}$

Por tanto, tenemos:
$\ln y = \frac{x^2}{2} + C \qquad \Rightarrow \qquad y = e^{(x^2/2)+C} = e^C e^{x^2/2} = C_1 e^{x^2/2}$

c) Finalmente, tenemos que determinar el valor de la constante C_1. Para esto, utilizaremos el dato o valor inicial: cuando $X = 0$, $Y = 1$. Tenemos:

$$1 = C_1 e^0 = C_1 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = 1$$

En definitiva, la función que expresa Y en función de X sería:

$$y = e^{x^2/2} \qquad \bullet$$

Ejemplo 9.- La velocidad de crecimiento del número de bacterias presentes en un cultivo es (aproximadamente) proporcional al número de bacterias existentes en cada momento. Cuando se efectuó la primera observación, el cultivo contenía 100 bacterias, y una hora más tarde contenía 150. Se pide:

a) Espresar el número N de bacterias en función del tiempo T (en horas).

b) ¿Cuánto tiempo tardaría en duplicarse el número de bacterias?

a) Queremos hallar la función $N = f(t) = N(t)$ que expresa el número de bacterias existentes en el cultivo a lo largo del tiempo (en horas), a partir de su velocidad de variación. En este caso, tenemos que plantear la ecuación diferencial a partir de la información de que la velocidad de variación es proporcional al número de bacterias existente en cada momento; esto es sencillo:

$$\text{“Velocidad de variación de } N\text{”} = N' = \frac{dN}{dt} = KN \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dN}{dt} = KN,$$

donde K es una constante de proporcionalidad, que tendremos que determinar.

A continuación, separamos las variables e integramos:

$$\frac{1}{N}dN = Kdt \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{1}{N}dN = \int Kdt$$

Ahora, resolvemos las integrales indefinidas (la primera con respecto a N, y la segunda con respecto a T):

$\int \frac{1}{N}dN = \ln N$
$\int Kdt = Kt$

Por tanto, tenemos:
$\ln N = Kt + C \qquad \Rightarrow \qquad N = e^{Kt+C} = e^{C}e^{Kt} = C_1e^{Kt}$

En este ejemplo, nos queda por determinar el valor de dos constantes: la constante de proporcionalidad K (que aparece al plantear la ecuación diferencial) y la constante C_1 (que surge al integrar). Por eso, en este caso, necesitamos dos datos o valores iniciales.

En primer lugar, tenemos que cuando $T = 0$, $N = 100$:
$100 = C_1e^{K0} = C_1 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = 100 \qquad \Rightarrow \qquad N = 100e^{Kt}$

En segundo lugar, tenemos que cuando $T = 1$, $N = 150$:
$150 = 100e^{K} \qquad \Rightarrow \qquad e^{K} = 1,5 \qquad \Rightarrow \qquad K = \ln 1,5 = 0,4055$

En definitiva, la función que expresa N en función de T sería:

$$N = f(t) = N(t) = 100\ e^{0,4055t}$$

b) Ahora utilizamos la función obtenida para hallar (aproximadamente) el tiempo que tardaría en duplicarse el número de bacterias: queremos calcular el valor de T que verifica que $N(t) = 200$. Tenemos:

$N(t) = 200 \quad \Rightarrow \quad 100\, e^{0,4055t} = 200 \quad \Rightarrow \quad 0,4055t = \ln 2 \quad \Rightarrow$ $t = \frac{\ln 2}{0,4055} = 1,71$ horas •

7 Utilización de R

La aplicación de la regla del trapecio y de la regla de Simpson no ofrece ninguna complicación, como se ha podido comprobar en los ejemplos de la Sección 4. En esos ejemplos, se utilizaban 4 subintervalos y se obtenían muy buenas aproximaciones. Sin embargo, a veces, es necesario utilizar más subintervalos, para mejorar la aproximación. El aumento del número de subintervalos no supone ninguna complicación teórica pero, si se quiere llevar a cabo con una calculadora, el proceso puede resultar enormemente tedioso, aumentando la probabilidad de que se produzcan errores. Por este motivo, cuando se quiere utilizar un número algo elevado de subintervalos, es muy conveniente recurrir a programas informáticos.

Uno de los muchos programas que se pueden utilizar es el programa R, *The R Project for Statistical Computing*, que se puede descargar y utilizar de forma gratuíta.

Volvamos al Ejemplo 5, para ilustrar el uso de R.

Ejemplo 5 (continuación).- Seguimos queriendo calcular la siguiente integral definida:

$$\int_{30}^{50} f(x)dx = \int_{30}^{50} (0,1)e^{-(0,1)x}dx$$

Aplicaremos nuevamente la regla de Simpson, pero ahora utilizaremos 10 subintervalos. Llevar esto a cabo con una calculadora sería bastante pesado, ya que tendríamos que ir calculando cuánto vale la función que se desea integrar en los 11 extremos de los 10 subintervalos. Es mucho más cómodo recurrir a R, que hará esos cálculos para nosotros. Los pasos que habría que dar son los siguientes:

1. En primer lugar, tenemos que definir en R la función f(x) que se quiere integrar. En este caso, escribiríamos:

   f= function(x){0.1*exp(-0.1*x)}

   La estructura de la instrucción es bastante sencilla, y no necesita demasiadas explicaciones.

2. En segundo (y último) lugar, aplicamos la regla de Simpson. En este caso, vamos a dividir el intervalo $[30, 50]$ en 10 subintervalos, cada uno de ellos con una longitud $h = 2$. La estructura de la siguiente instrucción, donde se aplica la regla de Simpson, tampoco necesita demasiadas explicaciones:

   (2/3)*(f(30)+4*f(32)+2*f(34)+4*f(36)+2*f(38)+4*f(40)+2*f(42)+4*f(44) +2*f(46)+4*f(48)+f(50))

   El resultado que se obtiene es 0,0431. Como se puede observar, este resultado aproximado coincide, por lo menos hasta la cuarta cifra decimal, con el resultado exacto. •

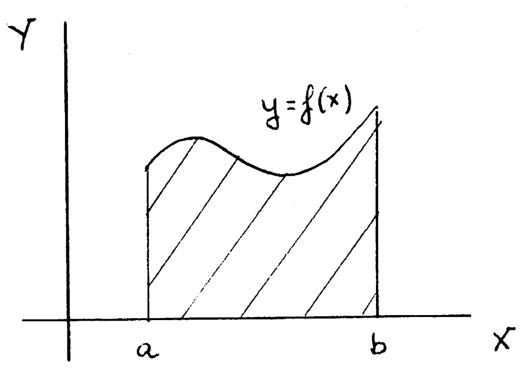

Figura 1

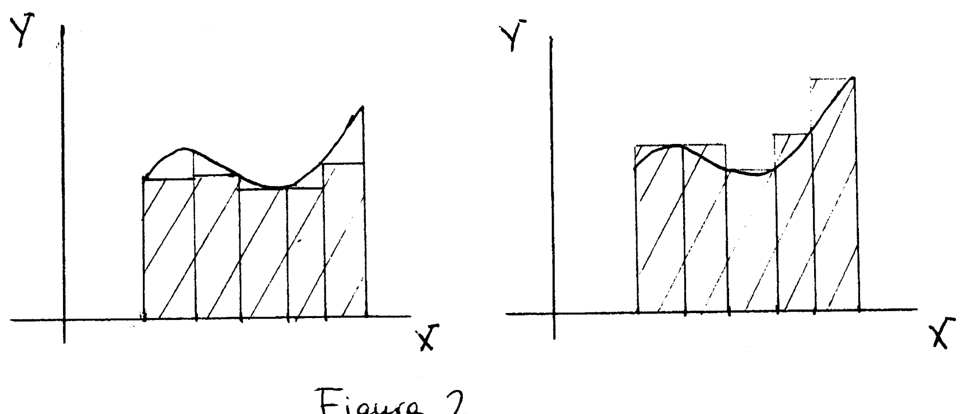

Figura 2

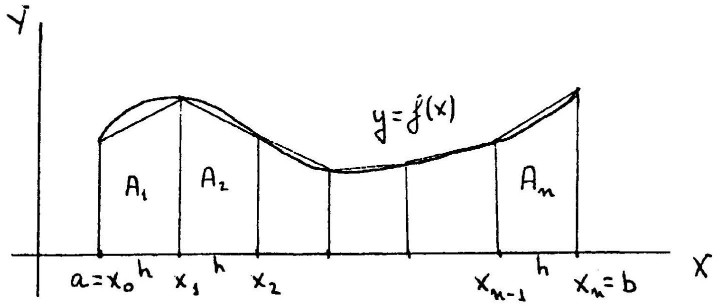

Figura 3

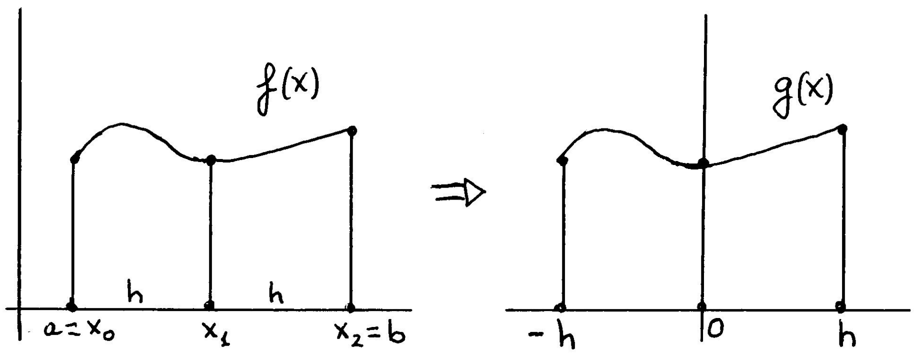

Figura 4

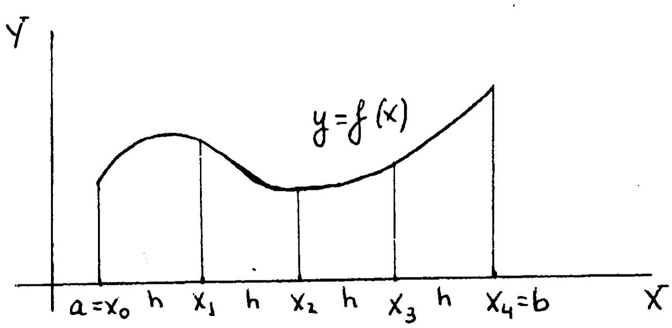

Figura 5

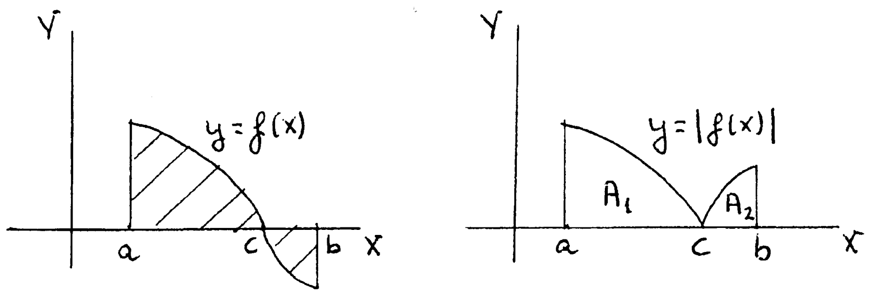

Figura 6

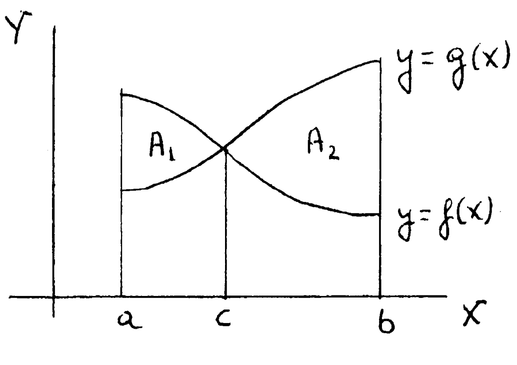

Figura 7

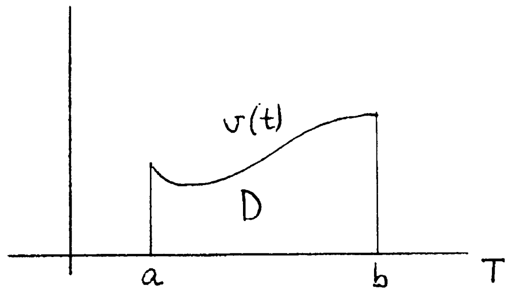

Figura 8

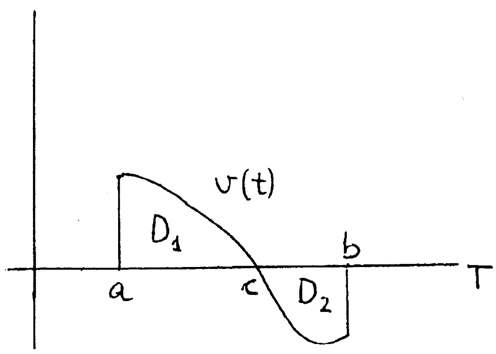

Figura 9