

---

**NOMBRE:**

D.N.I.:

[1] (a) Hacer un esquema de la gráfica de la función  $F(x) = \frac{x}{x^3 - 1}$  indicando su dominio de definición, asíntotas, regiones de crecimiento y decrecimiento, extremos locales y globales, si los hubiera.

(b) Probar que la ecuación  $F(x) = -1$  tiene una única solución. Cuantas soluciones tiene la ecuación  $F(x) = \frac{2}{9}$ ?

[2] Calcular el siguiente límite (es útil usar el desarrollo de Taylor)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} \frac{1}{x} + e}{\left(1 - \frac{x^2}{2} - \cos(x)\right)} \operatorname{sen} \left( \frac{e^{(x^2)} - x^2 - 1}{x^4 + x^2} \right)^2.$$

[3](a) Enunciar el Teorema del Valor Medio de Lagrange.

(b) Demostrar la desigualdad  $\frac{x}{2} \leq \ln(1+x)$ , para  $0 \leq x \leq 1$ .

[4] Probar por inducción la fórmula  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$  y discutir la convergencia (absoluta y condicional) de la siguiente serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} k\right) \frac{[1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)] \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k \log k}\right)}{(k + 1)^2 \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)}.$$