Hoja 3 de Problemas

1.- Utilizando la formulación en términos de ε y δ demostrar:

$$(a)\ \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2},\qquad (b)\ \lim_{x\to 1}\frac{2\,x}{3+x}=\frac{1}{2},\qquad (c)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{|x|}=0,\qquad (d)\ \lim_{x\to 0}x\ \mathrm{sen}\,\frac{1}{x}=0.$$

2.- Discutir la existencia de los límites siguientes y calcular su valor si es posible:

$$(a)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-4}\qquad (b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\qquad (c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(\tan x)}{x}$$

$$(d)\ \lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x^2}\qquad (e)\ \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ \mathrm{sen}\,\frac{1}{x}\qquad (f)\ \lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{sen}(x^2-1)}{x-1}$$

$$(g)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2\,(3+\mathrm{sen}\,x)}{(x+\mathrm{sen}\,x)^2}\qquad (h)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x\ \mathrm{sen}\,x}{x^2+5}\qquad (i)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x}}{x}$$

$$(j)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-x+1}{\sqrt{x}+x-1}\qquad (k)\ \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+4}}{x^2+4\,x+3}\qquad (l)\ \lim_{x\to 1^+}\frac{3}{x-1}$$

$$(m)\ \lim_{x\to 2^-}\frac{x}{x^2-4}\qquad (n)\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{4}\left[\frac{3}{x}\right]\qquad (\tilde{n})\ \lim_{x\to 1}x\left[\frac{3}{x}\right]$$

$$(o)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{[x]}\qquad (p)\ \lim_{x\to 1}\left(\left|\frac{x^2-3\,x+2}{x^2+x-2}\right|^3+x^6-1\right)\qquad (q)\ \lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}$$

3.- Encontrar las constantes a y b para las cuales se tiene:

$$(i)\ \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-a\,x-b)=1,\qquad (ii)\ \lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-a\,x-b)=1.$$

4.- Demostrar que si $\lim_{x\to 0}g(x)=0$, entonces $\lim_{x\to 0}g(x)\,\cos\frac{1}{x}=0$

5.-

(a) Demostrar que $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to 0}f(x+a)$ y que $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}f(x^3)$.

(b) Encontrar una función f, tal que exista $\lim_{x\to 0}f(x^2)$, y sin embargo no exista $\lim_{x\to 0}f(x)$.

6.- Dado $F\subset\mathbb{R}$, demostrar que la función distancia a F definida por

$$f(x)=d(x,F)=\inf\{|x-y|:y\in F\}$$

es continua.

7.- Dar un ejemplo de función definida sobre todos los reales que sólo sea continua en los puntos 0 y 1.

8.- Demostrar que un función definida en $\mathbb{R}$, verificando

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R},$$

y que es continua en 0, es continua en cualquier otro punto.

9.- Si una función continua en $\mathbb{R}$ sólo toma valores racionales. ¿Qué puede decirse de la función?.

10.- Estudiar los puntos de discontinuidad y establecer en su caso el tipo de la misma para las siguientes funciones:

$$f_1(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, \qquad f_2(x) = \frac{b}{x - b}, \qquad f_3(x) = x\left[\frac{1}{x}\right], \qquad f_4(x) = [\operatorname{sen} x].$$

$$f_5(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in [a-1, a), \\ x + a & \text{si} \quad x \in [a, a+1]. \end{cases} \qquad f_6(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 1 - x & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

$$f_7(x) = \begin{cases} -|\operatorname{sen} x| - 4 & \text{si} \quad x < \pi, \\ |\cos x| - 5 & \text{si} \quad x \geq \pi. \end{cases} \qquad f_8(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{si} \quad x \leq 0, \\ \operatorname{sen}(\pi\, x) & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ |x^2 - 5\,x + 4| & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

$$f_9(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2 + 2^{\tan x}} & \text{si} \quad x \in [0, \pi],\ x \neq \dfrac{\pi}{2}; \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

11.-

(a) ¿Es cierto que una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que en todo intervalo cerrado tenga un máximo y un mínimo es continua?.

(b) ¿Es cierto que una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que para cada $a < b$, f toma en $[a, b]$ todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ es continua?.

12.- Un punto fijo de f es una solución de la ecuación $f(x) = x$. Sea f una función continua en todos los puntos donde está definida. Decidir razonadamente:

(a) Si $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$, entonces f tiene un punto fijo.

(b) Si $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$, entonces f tiene un único punto fijo.

(c) Si $f : (a, b) \longrightarrow (a, b)$, entonces f tiene un punto fijo.

13.- Demostrar que no existe ninguna función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que tome exactamente dos veces cada valor.

14.- Demostrar que las siguientes ecuaciones tienen solución:

$$(a) \quad x - \operatorname{sen} x - 5 = 0, \qquad\qquad (b) \quad x^7 + \frac{213}{2 + x^2 + \tan^2 x} = 12.$$