Análisis Matemático I. *Curso 2011/2012.* *Test 3: 11.01.2012*

NOMBRE: D.N.I.:

Utilizar solo el espacio comprendido en esta hoja por las dos caras.

1.: Calcular las siguientes integrales

$$\mathbf{A}: \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}+x}\,dx\ ; \qquad\qquad \mathbf{B}: \quad \int_0^\pi \mathrm{e}^x\big(\operatorname{sen} x+\cos x\big)dx\ .$$

(en la integral **A** intentar la substitución $x = y^n$).

Solución.

A. Usamos la substitución $x = y^3$, $dx = 3y^2dy$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}+x}\,dx = \int_0^1 \frac{3y^2}{y+y^3}\,dy = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{2y}{1+y^2}\,dy = \frac{3}{2}\left[\log(1+y^2)\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{3}{2}\log 2\,.\ \square$$

B. Integramos por partes dos veces, siempre integrando e^x y derivando $\big(\operatorname{sen} x+\cos x\big)$)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \mathrm{e}^x\big(\operatorname{sen} x+\cos x\big)dx &= \left[\mathrm{e}^x\big(\operatorname{sen} x+\cos x\big)\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi \mathrm{e}^x\big(\cos x-\operatorname{sen} x\big)dx\\ &= -2\mathrm{e}^x - \left[\mathrm{e}^x\big(\cos x-\operatorname{sen} x\big)\right]_{x=0}^{x=\pi} + \int_0^\pi \mathrm{e}^x\big(-\operatorname{sen} x-\cos x\big)dx\\ &= -2\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x - \int_0^\pi \mathrm{e}^x\big(\operatorname{sen} x+\cos x\big)dx = -\int_0^\pi \mathrm{e}^x\big(\operatorname{sen} x+\cos x\big)dx\,.\end{aligned}$$

Deducimos que

$$2\int_0^\pi \mathrm{e}^x\big(\operatorname{sen} x+\cos x\big)dx = 0\,.\ \square$$

2.: Determinar si existen las siguientes integrales impropias y, en caso afirmativo, encontrar su valor:

$$\mathbf{A}: \int_1^\infty \frac{x\,\log\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx\;;\;\mathbf{B}: \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\Big(1-\log\left(\operatorname{sen} x\right)\Big)^{-2} dx\;;$$

Solución.

A. Esta integral es convergente: se puede ver por comparación:

$$0 \le \frac{x\,\log\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} \le \frac{x\,\log\left(1+x^2\right)}{x^4} \le \frac{2x^2}{x^4} = \frac{2}{x^2}\,,$$

y entonces

$$0 \le \int_1^\infty \frac{x\,\log\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx \le 2\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 2\,.$$

Para calcular su valor, usamos la substitución $1+x^2 = y$, $2x\,dx = dy$; $x=1$ corresponde a $y=2$ y $x=\infty$ a $y=\infty$:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{x\,\log\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{\log y}{y^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\log y}{y}\right]_{y=2}^{y\to\infty} + \frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{1}{y^2}\,dx \\ &= \frac{\log 2}{4} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{y}\right]_{y=2}^{t\to\infty} = \frac{\log 2}{4} + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

hemos integrado por partes en el segundo paso, integrando $1/y^2$ y derivando el logaritmo. $\square$

B. Primero observamos que la integral impropia tiene la singularidad solo en el cero y resulta ser convergente, usando el criterio de comparación asintótica:

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\Big(1-\log\left(\operatorname{sen} x\right)\Big)^{-2} \sim \frac{1}{x(1-\log(x))^2} \qquad \text{cuando } x\to 0$$

y es fácil ver que la integral impropia de $\frac{1}{x(1-\log(x))^2}$ es convergente: se puede calcular con la substitución $y=\log(x)$, $dx = \frac{dy}{y}$, $x=0$ corresponde a $y=-\infty$ $x=\pi/2$ a $y=\log(\pi/2)$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x(1-\log(x))^2}dx = \int_{-\infty}^{\log(\pi/2)} \frac{1}{(1-y)^2}dy = \left[\frac{1}{1-y}\right]_{y\to-\infty}^{y=\log(\pi/2)} = \frac{1}{1-\log(\pi/2)}\,.$$

Para calcular el valor de la integral es suficiente notar que

$$\frac{d}{dx}\log(\operatorname{sen}(x)) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

por lo tanto podemos hacer la sustitución $y=\log(\operatorname{sen}(x))$, $dy = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}dx$; $x=0$ corresponde a $y=-\infty$, $x=\pi/2$ a $y=0$:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\Big(1-\log\left(\operatorname{sen} x\right)\Big)^{-2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(1-y)^2}dx = \left[\frac{1}{1-y}\right]_{y\to-\infty}^{y=0} = 1$$

(también se puede hacer con doble sustitución: $t=\operatorname{sen}(x)$ y $y=\log(t)$). $\square$