NOMBRE: D.N.I.:

Utilizar solo el espacio comprendido en esta hoja por las dos caras.

1.: (*5 puntos*) Estudiar la convergencia de las series:

$$(a) \quad \sum_{n=3}^{+\infty} a_n = \sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n}{n^2+4}\right)}{\log\left(\pi+\sqrt{n}\,\right)} \qquad (b) \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2(n+1)}\log(n^2-\mathrm{e})}\,.$$

Solución. (a) Primero miramos la convergencia absoluta, es decir miramos si la serie de términos positivos $\sum_{n=3}^{+\infty}|a_n|$ es convergente. Recuerdo que $\operatorname{sen}(x) \sim x$ cuando $x \to 0$. Tomando $x_n = \frac{n}{n^2+4} \to 0$ que resulta ser sucesión monótona decreciente (servirá después): probamos que $x_n > x_{n+1}$, es decir

$$\frac{n}{n^2+4} > \frac{n+1}{(n+1)^2+4} \iff n^3+2n^2+3n > n^3+n^2+4n+4 \iff n^2 > n+4 \iff n \geq 3$$

sigue que $\sin(x_n) \sim x_n$ dado que $x_n \to 0$, por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n}{n^2+4}\right)}{\log\left(\pi+\sqrt{n}\,\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n}{n^2+4}\right)}{\log\left(\pi+\sqrt{n}\,\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n\log n} = 0$$

dado que $x_n = \frac{n}{n^2+4} \sim \frac{1}{n}$ cuando $n \to \infty$, y

$$\log\left(\pi+\sqrt{n}\,\right) \sim \frac{1}{2}\log n \iff \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\pi+\sqrt{n}\,\right)}{\frac{1}{2}\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\sqrt{n}}{\frac{1}{2}\log n} = 1$$

Analizando cuidadosamente el limite, deducimos que (parte en azul) $a_n \sim \frac{2}{n\log n}$, con lo cual ya sabemos por el criterio de comparación asintótica que la serie $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ es divergente, dado que $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n\log n} = +\infty$ (por condensación). Recuerdo el criterio de comparación asintótica:

Criterio de comparación asintótica:

Sean $a_n, b_n \geq 0$ y $a_n \sim b_n$, para $n \to \infty$. Entonces $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ converge si y solo si $\sum_{n=3}^{\infty} b_n$ converge.

PRUEBA. *$a_n \sim b_n$ si y solo si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0 = N_0(\varepsilon)$ tal que $\forall n > N_0$ tenemos*

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-1\right| < \varepsilon \iff 1-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1+\varepsilon \iff (1-\varepsilon)b_n < a_n < (1+\varepsilon)b_n$$

por lo tanto (por sandwich) pasando al limite $N \to \infty$

$$(1-\varepsilon)\sum_{n=N_0}^{N} b_n < \sum_{n=N_0}^{N} a_n < (1+\varepsilon)\sum_{n=N_0}^{N} b_n \Longrightarrow (1-\varepsilon)\sum_{n=N_0}^{\infty} b_n < \sum_{n=N_0}^{\infty} a_n < (1+\varepsilon)\sum_{n=N_0}^{\infty} b_n\,,$$

por lo tanto la suma de a_n es finita si y solo si lo es la suma de b_n. $\square$

La serie converge condicionalmente por el criterio de Leibnitz, dado que $a_n \to 0$ y es decreciente

$$a_{n+1} > a_n \iff \frac{\operatorname{sen}(x_n)}{\log\left(\pi+\sqrt{n}\,\right)} > \frac{\operatorname{sen}(x_{n+1})}{\log\left(\pi+\sqrt{n+1}\,\right)}$$

lo cual es cierto dado que $1 > x_n > x_{n+1} \geq 0$. $\square$

(b) La serie es divergente. Se puede probar de dos maneras:

(i) Por comparación, siendo el termino general mayor que $\frac{1}{2n\log n}$ que sabemos ser divergente (por condensación). La comparación es

$$\frac{\left(\sqrt{n+1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2(n+1)}\log(n^2-\mathrm{e})} \geq \frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{n}\right)^{2(n+1)}\log(n^2)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{n\,2\log n} \geq \frac{1}{2n\log n}\,,$$

dado que $\sqrt{n+1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}\,$, $\frac{1}{\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ y $\frac{1}{\log(n^2-\mathrm{e})} \leq \frac{1}{\log(n^2)}$. $\square$

(ii) Por comparación asintótica: puedo tirar los términos de orden inferior, de hecho se que $\sqrt{n+1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \sqrt{n+1}$, $\frac{1}{\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ y $\frac{1}{\log(n^2-\mathrm{e})} \sim \frac{1}{\log(n^2)}$, cuando $n \to \infty$, por lo tanto:

$$\frac{\left(\sqrt{n+1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2(n+1)}\log(n^2-\mathrm{e})} \sim \frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{n}\right)^{2(n+1)}\log(n^2)} \sim \frac{1}{2n\log n}\,,$$

Aplicamos el criterio de comparación asintótica, sabiendo que la serie $\frac{1}{2n\log n}$ es divergente (condensación).

2.: (*5 puntos*) Se considere la función

$$f(x) := \frac{\big([x-a]+a\big)\ \operatorname{sen}\Big(\big(\mathrm{e}^x-1\big)^2\Big)}{\big(\sqrt{x}\ \log\left(1+\sqrt{x}\,\right)\big)^2}$$

al variar del parametro $a \in [-1,1]$, donde $[x]$ indica la parte entera del numero $x \in \mathbb{R}$.
(i) Calcular los siguientes limites, considerando que el parámetro a puede variar entre $[-1,1]$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x)$$

(ii) [*opcional*] Especificar el dominio natural de la función f y discutir la continuidad de f en su dominio, considerando que el parámetro a puede variar entre $[-1,1]$.

Solución. Recordamos que $x-1 \le [x] \le x$, con lo cual tenemos que (los azules se simplifican)

$$\frac{\big(x-a+a-1\big)\ \operatorname{sen}\Big(\big(\mathrm{e}^x-1\big)^2\Big)}{\big(\sqrt{x}\ \log\left(1+\sqrt{x}\,\right)\big)^2} \le f(x) \le \frac{\big(x-a+a\big)\ \operatorname{sen}\Big(\big(\mathrm{e}^x-1\big)^2\Big)}{\big(\sqrt{x}\ \log\left(1+\sqrt{x}\,\right)\big)^2} \tag{1}$$

luego recuerdo los limites fundamentales $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1$, $\lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{e}^t-1}{t} = 1$, $\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$, poniendo $t = \sqrt{x} \to 0$ y $t = x^2 \to 0$, tenemos que (por el principio de substitución)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\Big(\big(\mathrm{e}^x-1\big)^2\Big)}{\big(\sqrt{x}\ \log\left(1+\sqrt{x}\,\right)\big)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{\big(\sqrt{x}\ \sqrt{x}\,\big)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

por lo tanto, pasando al límite en la desigualdad de arriba (sandwich), tenemos que $x-1 \le f(x) \le x$. En realidad el limite es dado por

$$\lim_{x\to 0} \frac{\big([x-a]+a\big)\ \operatorname{sen}\Big(\big(\mathrm{e}^x-1\big)^2\Big)}{\big(\sqrt{x}\ \log\left(1+\sqrt{x}\,\right)\big)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\big([x-a]+a\big)\ \operatorname{sen} x^2}{\big(\sqrt{x}\ \sqrt{x}\,\big)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\big([x-a]+a\big)\ x^2}{x^2} = [-a]+a$$

entonces cuando $a \ne -1, 0, 1$, no hay problemas, la función parte entera es continua, el limite existe y vale precisamente $[-a]+a$. Cuando $a = -1, 0, 1$, la función parte entera no es continua, los limites laterales son distintos (aunque siempre sea verdad que $x-1 \le f(x) \le x$):

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = [-a^-]+a = -a-1+a = -1 \ne \lim_{x\to 0^+} = [-a^+]+a = 0\,.$$

Por lo tanto el limite para $x \to 0$ existe y es $[-a]+a$ cuando $-1 < a < 0$ y $0 < a < 1$, mientras no existe cuando $a = -1, 0, 1$.

El limite para $x \to +\infty$ es cero, por sandwich, teniendo en cuenta la desigualdad (1), y pasado al limite cuando $x \to +\infty$:

$$0 = \lim_{x\to\infty} \frac{\big(x-1\big)\ \operatorname{sen}\Big(\big(\mathrm{e}^x-1\big)^2\Big)}{\big(\sqrt{x}\ \log\left(1+\sqrt{x}\,\right)\big)^2} \le \lim_{x\to\infty} f(x) \le \lim_{x\to\infty} \frac{x\ \operatorname{sen}\Big(\big(\mathrm{e}^x-1\big)^2\Big)}{\big(\sqrt{x}\ \log\left(1+\sqrt{x}\,\right)\big)^2} = 0$$

dado que puedo suponer $x > 0$, y se que$\log\left(1+\sqrt{x}\,\right) \sim \frac{1}{2}\log x$, $|\operatorname{sen}\Big(\big(\mathrm{e}^x-1\big)^2\Big)| \le 1$, y que

$$0 \le \lim_{x\to\infty} \frac{\big|x-1\big|\ \Big|\operatorname{sen}\Big(\big(\mathrm{e}^x-1\big)^2\Big)\Big|}{\big(\sqrt{x}\ \log\left(1+\sqrt{x}\,\right)\big)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x|\ \Big|\operatorname{sen}\Big(\big(\mathrm{e}^x-1\big)^2\Big)\Big|}{\big(\sqrt{x}\ \log\left(1+\sqrt{x}\,\right)\big)^2} \le \lim_{x\to\infty} \frac{4\,x}{x\ \left(\log x\right)^2} = 0\,. \ \square$$

(ii) El dominio natural de la función es $\operatorname{dom}(f) = [0,+\infty)$, dado que el logaritmo $\log(1+y)$ es definido para numeros $y > -1$ y $\operatorname{dom}(\sqrt{\cdot}\,) = [0,+\infty)$. Dado que la función parte entera es discontinua en los enteros $\mathbb{Z}$, tenemos que su traslación $[x-a]$ es discontinua en todos los puntos del tipo $x_k = a+k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, mientras el resto de la función $\frac{\operatorname{sen}\left(\left(\mathrm{e}^x-1\right)^2\right)}{\left(\sqrt{x}\ \log\left(1+\sqrt{x}\right)\right)^2}$ es continua en todo $\operatorname{dom}(f) = [0,+\infty)$, dado que es composición de funciones continuas. Por lo tanto, la función f es discontinua en $\operatorname{dom}(f) \setminus \big\{x_k\big\}_{k\in\mathbb{Z}} = [0,+\infty) \setminus \big\{x_k\big\}_{k\in\mathbb{Z}}$. De hecho los dos limites laterales cuando $x \to x_k$ son diferentes:

$$\lim_{x\to x_k^-} f(x) = [0^-]+a = a-1 \ne \lim_{x\to x_k^+} = [0^+]+a = a\,, \qquad \text{entonces} \qquad \lim_{x\to x_k} f(x) = \nexists\,.$$

Las discontinuidades en los puntos $[0,+\infty) \setminus \big\{x_k\big\}_{k\in\mathbb{Z}}$ son de tipo salto finito (de amplitud $1 = |(a-1)-a|$) y no se pueden eliminar. $\square$