Análisis Matemático I. *Curso 2011/2012.* *Test 1. 14.10.2011*

NOMBRE: D.N.I.:

Utilizar solo el espacio comprendido en esta hoja por las dos caras.

1.: (*5 puntos*) Probar que la siguiente identidad es válida $\forall n = 1, 2, 3, \ldots$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

y calcular el limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[n^2 + n\,\frac{6n^3-n^4}{n^5+2}\right]^2 \left(1-\frac{1}{n^3}\right)^{n^3}}{\left[1+3+5+\ldots+(2n-1)\right]^2}\,.$$

Solución. Primero probamos la igualdad por inducción:
$n = 1$ es verdad: $1 = 1^2$, y también para $n = 2$, tenemos que $1 + 3 = 2^2$.
Luego hay que probar que si es verdad para $n = k$ entonces es verdad para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}1+3+5+\ldots+\left[2(k+1)-1\right] &= \underbrace{1+3+5+\ldots+\left[2k-1\right]}_{=k^2 \text{ hip. inductiva}} + \left[2(k+1)-1\right] \\ &= k^2 + \left[2(k+1)-1\right] = k^2+2k+1 = (k+1)^2\,.\end{aligned}$$

Entonces es verdad para todo $n \geq 1$.
Ahora ya podemos usar la formula recién probada para calcular el limite:

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \frac{\left[n^2 + n\,\frac{6n^3-n^4}{n^5+2}\right]^2 \left(1-\frac{1}{n^3}\right)^{n^3}}{\left[1+3+5+\ldots+(2n-1)\right]^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[n^2 + \frac{6n^4-n^5}{n^5+2}\right]^2 \left(1-\frac{1}{n^3}\right)^{n^3}}{n^4} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left[n^2-1\right]^2}{\mathrm{e}\,n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[n^2\right]^2}{\mathrm{e}\,n^4} = \frac{1}{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

en los pasajes he usado estas igualdades:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^4-n^5}{n^5+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^5}{n^5} = -1$$

en el primer paso he podido descuidar de los términos de orden inferior, dado que evidentemente cuando $n \to \infty$ tenemos que $6n^4 - n^5 \sim -n^5$ y también $n^5 + 2 \sim n^5$. Recordando:

$$6n^4 - n^5 \sim -n^5 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{6n^4-n^5}{-n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n^4}{-n^5} + \lim_{n\to\infty} \frac{-n^5}{-n^5} = -\lim_{n\to\infty} \frac{6}{n} + 1 = 1$$

$$n^5 + 2 \sim n^5 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^5+2}{n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{n^5} + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^5} = 1$$

Además puedo observar que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^3}\right)^{n^3} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

dado que a_{n^3} es una subsucesión de a_n por lo tanto el limite (dado que existe) es el mismo y ya sabemos que $(1-\frac{1}{n})^n \to \mathrm{e}^{-1}$.

2.: (*5 puntos*) Se considera la sucesión

$$a_1 = 2 \qquad \text{y} \qquad a_{n+1} = \frac{n-1}{n} a_n + \frac{1}{n} \tag{1}$$

a: Decir si la sucesión esta acotada superiormente y/o inferiormente y hallar unas cotas en caso afirmativo. Que sabes decir sobre el ínfimo y/o el supremo ?

b: Hallar la fórmula explícita de la sucesión a_n y calcular su limite.

Solución. a: Estudiamos la monotonía: (es más fácil ver las cotas si fuese monótona)

$$a_{n+1} \le a_n \qquad \iff \qquad \frac{n-1}{n} a_n + \frac{1}{n} \le a_n \qquad \iff \qquad a_n \ge 1.$$

Entonces probamos por inducción que si $a_1 \ge 1$ entonces $a_n \ge 1$ para todo $n \ge 1$: dado que $a_1 = 2 \ge 1$, solo falta probar que si es verdad para $n = k$ entonces es verdad para $n = k+1$: ya que por hipótesis inductiva $a_k \ge 1$ resulta facile ver que

$$a_{k+1} \frac{k-1}{k} \underbrace{a_k}_{\ge 1} + \frac{1}{k} \ge \frac{k-1}{k} + \frac{1}{k} = 1\,.$$

Por lo tanto la sucesión es monótona decreciente cuando $a_1 \ge 1$ y queda claro que es monótona creciente cuando $a_1 \le 1$ (basta con invertir todas las desigualdades). Además notamos que si $a_N = 1$ para un cierto $N \in \mathbb{N}$, entonces

$$a_{N+1} = \frac{N-1}{N} a_N + \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N} + \frac{1}{N} = 1\,,$$

y la sucesión llega a ser constantemente 1. En el caso que consideramos $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ y todos los otros términos resultan ser $a_{n+1} = 1$, para todo $n \ge 2$ entonces la sucesión converge a 1, siendo para $n \ge 2$ la sucesión constante $a_n = 1$.

Resumiendo, la sucesión está acotada: si $a_1 \ge 1$ entonces $a_n \ge 1$ para todo $n \ge 1$ y es decreciente, por lo tanto $1 \le a_n \le a_1$ entonces converge hace a su ínfimo. En el caso que estamos considerando $a_1 = 2 \ge 1$, entonces la sucesión es decreciente y converge hace a su ínfimo. Mientras si $a_1 \le 1$ entonces $a_n \le 1$ para todo $n \ge 1$ y es creciente, por lo tanto $a_1 \le a_n \le 1$entonces converge hace a su supremo.

Tratamos ver si la relación de recurrencia permite tener información sobre el posible limite $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$: pasando al limite en ambos miembros en la formula (1) se obtiene $\ell = \ell$, que no ayuda.

b. Observo que si fuese $a_2 = 2$, entonces

$$a_3 = \frac{1}{2} 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \qquad a_4 = \frac{2}{3}\frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \qquad a_5 = \frac{3}{4}\frac{4}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

y ya la sucesión no es constante. Calculamos el termino general de la sucesión, y vemos que en realidad el límite no depende del valor de $a_2 > 0$:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{n-1}{n} a_n + \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}\left(\frac{n-2}{n-1} a_{n-1} + \frac{1}{n-1}\right) + \frac{1}{n} \\
&= \frac{n-2}{n} a_{n-1} + \frac{2}{n} = \frac{n-2}{n}\left(\frac{n-3}{n-2} a_{n-2} + \frac{1}{n-2}\right) + \frac{2}{n} \\
&= \frac{n-3}{n} a_{n-2} + \frac{3}{n} = \ldots = \frac{n-j-1}{n} a_{n-j} + \frac{j+1}{n} = \ldots = \frac{1}{n} a_2 + \frac{n-1}{n}
\end{aligned}$$

Entonces para todo $a_2 > 0$ (en realidad para todo $a_2 \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{a_2}{n}}_{\to 0} + \frac{n-1}{n} = 1\,.$$

Resumiendo: la sucesión converge a 1 independientemente de a_1. Además hemos probado que:
- Si $a_1 \ge 1$ la sucesión es decreciente y converge a su ínfimo, que resulta ser 1 (pero no es mínimo), dado que el limite es único; y el supremo es dado por $a_1 = 2$ y es máximo.

- Análogamente, cuando $a_1 \le 1$ la sucesión es creciente y converge a su supremo, que resulta ser 1 (pero no es máximo), dado que el limite es único; el ínfimo resulta ser $a_1 \le 1$ y también es minimo. □