

NOMBRE:

D.N.I.:

[1] (5 PUNTOS) Dada la función

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{5}{4}\sqrt{x+2}, & \text{para } x < -1 \\ x e^{-\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}, & \text{para } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{1+(x-1)^2}, & \text{para } x > 1 \end{cases}$$

responder a las siguientes preguntas, *justificando razonadamente las respuestas*.

- (a) Esbozar la gráfica de la función (dominio, límites, derivada(s), máx, mín, ...)
- (b) ¿Es verdad que  $-1 \leq f(x) \leq 1$  para cada  $x \in \text{dom}(f)$ ?
- (c) ¿Es la función  $f$  continua en su dominio? ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación  $f(x) = 0$ ? ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación  $f(x) = \frac{1}{2}$ ? Encontrar intervalos de forma que cada uno contenga una y solo una de las soluciones de  $f(x) = 0$  y de  $f(x) = \frac{1}{2}$ . Probar que la ecuación  $f(x) = b$  no tiene solución para  $b > 1$  y para  $b < -1$ .
- (d) ¿Es la función  $f$  derivable en su dominio? Escribir la expresión de  $f'$  en todos los puntos en los cuales existe. Esbozar la gráfica de  $f'$ . Encontrar y clasificar los puntos críticos  $f'(x) = 0$ . ¿Son los puntos críticos puntos de máximo o mínimo? Encontrar todos los puntos de máximo y mínimo de  $f$ , locales y globales.

(\*) [PREGUNTAS A RESPONDER SOLO SI YA ESTÁ HECHO TODO EL RESTO DEL EXAMEN]

¿Cuántas derivadas continuas existen en  $x_0 = 0$ ? ¿Que sabes decir del orden de contacto en  $x_0 = 0$ ? Escribir el polinomio de Taylor de  $f$  en  $x_0 = 0$ , hasta el orden 4: este polinomio es o no es una “buena aproximación” de la función en el intervalo  $(-0,01, 0,01)$ ?

[2] (2.5 PUNTOS) Calcular el siguiente límite (es útil usar el desarrollo de Taylor)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sin(x)} - 1)(x - \sin(x))}{(x - \log(1+x))}.$$

[3] (2.5 PUNTOS) Discutir la convergencia (absoluta y condicional) de la siguiente serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \cos(\pi k) \frac{1+2+3+\dots+k}{k(k+1)^2 \log(1+k)}.$$