Análisis Matemático I. Curso 2010/2011. *Test 3 — 11.01.2011*

NOMBRE: D.N.I.:

1.- Calcular las siguientes primitivas:

$$\mathbf{A}: \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}; \qquad \mathbf{B}: \int x \arctan x \ \mathrm{d}x.$$

(en la integral **A** intentar la substitución $x = y^n$.)

Solucion.

A. La substitucion $x = y^6$, $\mathrm{d}x = 6y^5\mathrm{d}y$ nos proporciona

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} = 6\int \frac{y^5}{\sqrt[3]{y^6}+\sqrt{y^6}}\mathrm{d}y = 6\int \frac{y^5}{y^2(y+1)}\mathrm{d}y = 6\int \frac{y^3}{y+1}\mathrm{d}y \\
&= 6\int \frac{y^3+1}{y+1}\mathrm{d}y - 6\int \frac{1}{y+1}\mathrm{d}y = 6\int \frac{(y+1)(y^2-y+1)}{y+1}\mathrm{d}y - 6\log|1+y| + K \\
&= 6\frac{y^3}{3} - 6\frac{y^2}{2} + 6y - 6\log|1+y| + K = 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\log\left(1+x^{\frac{1}{6}}\right)
\end{aligned}$$

B. Esta integral se puede hacer integrando por partes: integro x, y obtengo $\frac{x^2}{2}$, y derivo $\arctan(x)$ que me da $\frac{1}{1+x^2}$:

$$\begin{aligned}
\int x\arctan x \ \mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\arctan(x)\right] - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\arctan(x)\right] - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\arctan(x)\right] - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan(x) + K\,. \ \square
\end{aligned}$$

2.- Decidir si las siguientes integrales impropias son convergentes o divergentes:

$$\mathbf{A}: \int_0^1 \frac{\log(x)}{(x-1)\sqrt{\sin(\pi\, x)}} \mathrm{d}x; \qquad\qquad \mathbf{B}: \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-x}+6x^4} \mathrm{d}x.$$

Solucion.

A. La función $f(x) = \frac{\log(x)}{(x-1)\sqrt{\sin(\pi\, x)}}$ dentro la integral tiene problemas sea en cero que en uno, entonces separo:

$$\int_0^1 \frac{\log(x)}{(x-1)\sqrt{\sin(\pi\, x)}} \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\log(x)}{(x-1)\sqrt{\sin(\pi\, x)}} \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\log(x)}{(x-1)\sqrt{\sin(\pi\, x)}} \mathrm{d}x = (I) + (II)$$

y estudio separadamente las dos integrales impropias. La funcion f tiene comportamiento distinto en cero y en uno, para entenderlo uso el polinomio de Taylor:

$$\begin{aligned}
&\sin(\pi x) = \pi x + o(x^2) \qquad \text{Taylor en } x_0 = 0\,,\\
&\sin(\pi x) = \pi(1-x) + o((x-1)^2) \qquad \text{Taylor en } x_0 = 1\\
&\log(x) = x-1 \qquad \text{Taylor en } x_0 = 1
\end{aligned}$$

por lo tanto tengo que

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{\log(x)}{(\pi x)^{\frac{1}{2}}} := g_0(x) \qquad \text{cuando } x \to 0^+\\
f(x) &\sim \frac{(x-1)}{(1-x)(\pi(1-x))^{\frac{1}{2}}} = \frac{-1}{(\pi(1-x))^{\frac{1}{2}}} := g_1(x) \qquad \text{cuando } x \to 1^-
\end{aligned}$$

Por el criterio de convergencia asitotica: *Si $f \sim g$ cuando $x \to b$, entonces $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente si y solo si $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente*, puedo garantizar que:

(I) es convergente dado que $\int_0^{1/2} g_0\,\mathrm{d}x$ es convergente (sandwich):

$$0 \leq \left| \int_0^{\frac{1}{2}} g_0(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_0^{\frac{1}{2}} |g_0(x)|\;\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{|\log(x)|}{(\pi x)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\alpha x^{\alpha}(\pi x)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{\alpha+\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x$$

dado que $|\log(x)| \leq \frac{1}{\alpha x^{\alpha}}$ para cada $0 \leq x \leq 1$, y cada $\alpha > 0$; elegimos por ejemplo un $0 < \alpha < 1/2$ de modo que $\alpha + \frac{1}{2} < 1$ y la ultima integral a la derecha sea convergente:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{\alpha+\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha-\frac{1}{2}} \left[\lim_{x\to 0^+} x^{1-\alpha-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2^{1-\alpha-\frac{1}{2}}} \right] = \frac{1}{2^{1-\alpha-\frac{1}{2}}}$$

(II) es convergente dado que $\int_0^{1/2} g_1\,\mathrm{d}x$ es convergente por ser de la forma $\int_0^b 1/x^{\beta}\,\mathrm{d}x$, con $\beta < 1$; eso se ve fácilmente con un cambio de variable: $x-1 = t$, y luego calculando la integral como arriba.

Finalmente la integral **A** resulta ser convergente. $\square$

B. La función $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-x}+6x^4}$ dentro la integral, tiene problemas sea en cero que en infinito, entonces separo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-x}+6x^4}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-x}+6x^4}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-x}+6x^4}\,\mathrm{d}x = (I) + (II)$$

y estudio separadamente las dos integrales impropias. La funcion f tiene comportamiento distinto en cero y en infinito: para cero uso Taylor, para el infinito el sandwich. La primera es convergente, dado que

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-x}+6x^4} \sim \frac{x}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = g_0(x) \qquad \text{cuando } x \to 0^+$$

por lo tanto, por el criterio de convergencia asintotica, sabemos que (I) es convergente, por ser f asintotica a g_0 en $x \to= 0^+$, que sabemos tener integral impropia convergente, por ser de la forma $\int_0^b 1/x^\beta \,\mathrm{d}x$, con $\beta < 1$.

La convergencia de la segunda integral sigue del sandwich:

$$0 \leq |f(x)| = \frac{|\sin(x)|}{x^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-x}+6x^4} \leq \frac{1}{6x^4}$$

dado que $|\sin(x)| \leq 1$ y $x^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-x}+6x^4 \geq 6x^4$ cuando $x \geq 1$. Tenemos entonces

$$0 \leq |(II)| = \left|\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-x}+6x^4}\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-x}+6x^4}\,\mathrm{d}x \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{6x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{18}.$$

Finalmente la integral **B** resulta ser convergente. $\square$