NOMBRE: D.N.I.:

Utilizar solo el espacio comprendido en esta hoja por las dos caras.

1.: (*5 puntos*) Calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Big(\cos(a-x)-\sin(x-a)\Big)^2-1}{e^{a^2+x^2}-1}\Big(1+\tan(x)\Big)^{\frac{a}{\sin(x)}}$$

al variar del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Solución. Calculamos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} & \frac{\Big(\cos(a-x)-\sin(x-a)\Big)^2-1}{e^{a^2+x^2}-1}\Big(1+\tan(x)\Big)^{\frac{a}{\sin(x)}} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\Big(\cos(a-x)-\sin(x-a)\Big)^2-1}{e^{a^2+x^2}-1}\ \lim_{x\to 0}\Big(1+\tan(x)\Big)^{\frac{a}{\sin(x)}}\end{aligned}$$

tratamos los dos límites separadamente:

$$\lim_{x\to 0}\Big(1+\tan(x)\Big)^{\frac{a}{\sin(x)}} = \lim_{x\to 0}\left(\Big(1+x\Big)^{\frac{1}{x}}\right)^a = e^a$$

dado que $\lim_{x\to 0}\sin(x)/x = \lim_{x\to 0}\tan(x)/x = 1$, y también sabemos que $\lim_{x\to 0}\Big(1+x\Big)^{\frac{1}{x}} = e$. Eso vale para todo $a \in \mathbb{R}$. El segundo límite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\Big(\cos(a-x)-\sin(x-a)\Big)^2-1}{e^{a^2+x^2}-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(a-x)+\sin^2(x-a)-2\sin(x-a)\cos(a-x)-1}{e^{a^2+x^2}-1} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(x-a)\cos(a-x)}{e^{a^2+x^2}-1} = \frac{2\sin(a)\cos(a)}{e^{a^2}-1}\end{aligned}$$

dado que $\cos^2(a-x)+\sin^2(x-a) = \cos^2(x-a)+\sin^2(x-a) = 1$, (recuerdo que $\cos(y) = \cos(-y)$ y que $\sin(-y) = -\sin(y)$). Todo eso vale cuando $a \neq 0$, es decir cuando el denominador del límite no es cero. Cuando $a = 0$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Big(\cos(-x)-\sin(x)\Big)^2-1}{e^{x^2}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)\cos(x)}{e^{x^2}-1} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{e^{x^2}-1} = 2\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \nexists$$

hemos usado que $\lim_{y\to 0}(e^y-1)/y = 1$, con $y = x^2$. Por lo tanto ese límite no existe, dado que

$$+\infty = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} \neq \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty\,.$$

Resumiendo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Big(\cos(a-x)-\sin(x-a)\Big)^2-1}{e^{a^2+x^2}-1}\Big(1+\tan(x)\Big)^{\frac{a}{\sin(x)}} = \begin{cases}\frac{2\sin(a)\cos(a)}{e^{a^2}-1} & \text{cuando } a \neq 0\,, \\ \text{no existe} & \text{cuando } a = 0\,.\end{cases}$$

2.: (*5 puntos*) Estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)!}{(n+3)!\log(5+n)\Big(\log\left(\mathrm{e}^4+n\right)\Big)^{1/\pi}}\,, \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{(n+2)!}{(n+3)!\Big(\log\left(\mathrm{e}^4+n\right)\Big)^{1/\pi}}\,,$$

Solución. Primero observamos que el termino general de las dos series converge a cero, dado que $\frac{(n+2)!}{(n+3)!} = \frac{1}{n+3}$, por lo tanto las dos series podrían ser convergentes.

(a) Esta es una serie de términos positivos, por lo tanto sabemos que o bien es convergente o bien es $+\infty$. Se puede escribir en la forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)!}{(n+3)!\log(5+n)\Big(\log\left(\mathrm{e}^4+n\right)\Big)^{1/\pi}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)\log(5+n)\Big(\log\left(\mathrm{e}^4+n\right)\Big)^{1/\pi}}$$

lo cual sugiere que es de la forma $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(\log n)^\alpha}$, con $\alpha = 1+\frac{1}{\pi} > 1$ por lo tanto esperamos que sea convergente, y lo probamos por comparación:

$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)\log(5+n)\Big(\log\left(\mathrm{e}^4+n\right)\Big)^{1/\pi}} \leq \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\log n)^{1+\frac{1}{\pi}}}\,,$$

la desigualdad es evidente, dado que $(n+3) \geq n$, $\log(5+n) \geq \log(n)$, y $\Big(\log\left(\mathrm{e}^4+n\right)\Big)^{1/\pi} \geq \log(n)$, por lo tanto la serie es convergente. Es fácil comprobar que la serie

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\log n)^\alpha} = \begin{cases} < +\infty & \text{cuando } \alpha > 1\,, \\ = +\infty & \text{cuando } \alpha \leq 1\,, \end{cases} \tag{1}$$

usando el criterio de codensación:

$$\sum_{n\geq 2}\frac{2^n}{2^n(\log 2^n)^\alpha} = \frac{1}{(\log 2)^\alpha}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} < +\infty & \text{cuando } \alpha > 1\,, \\ = +\infty & \text{cuando } \alpha \leq 1\,, \end{cases}$$

sabiendo la convergencia de la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ (que también se obtiene por el criterio de condensación.)

(b) Esta serie no es de términos positivos, por lo tanto hay dos posibilidades de convergencia: absoluta o condicional.

Convergencia absoluta. La serie no converge absolutamente: tomando la serie de los valores absolutos y comparando:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)\Big(\log\left(\mathrm{e}^4+n\right)\Big)^{1/\pi}} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\big([\mathrm{e}^4]+1+n\big)\Big(\log\left([\mathrm{e}^4]+1+n\right)\Big)^{1/\pi}} = +\infty\,,$$

se note que $[\mathrm{e}^4]$ es la parte entera de e^4, y que la desigualdad es verdad dado que $(n+3) \leq \big([\mathrm{e}^4]+1+n\big)$ y $\Big(\log\left(\mathrm{e}^4+n\right)\Big)^{1/\pi} \leq \Big(\log\left([\mathrm{e}^4]+1+n\right)\Big)^{1/\pi}$. La serie a la derecha es divergente por ser del tipo $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(\log n)^\alpha} = +\infty$, cuando $\alpha = 1/\pi < 1$, como en (1).

Convergencia condicional. La serie converge condicionalmente por el criterio de Leibnitz: es una serie alternada del tipo $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ con termino general monotono decreciente y que tiende a cero:

$$a_n = \frac{(n+2)!}{(n+3)!\Big(\log\left(\mathrm{e}^4+n\right)\Big)^{1/\pi}} = \frac{1}{(n+3)\Big(\log\left(\mathrm{e}^4+n\right)\Big)^{1/\pi}} \to 0$$

y es evidente que $a_{n+1} \leq a_n$. $\square$