Análisis Matemático I. *Curso 2010/2011.* *Test 1. 18.10.2010*

NOMBRE: D.N.I.:

Utilizar solo el espacio comprendido en esta hoja por las dos caras.

1.: (*5 puntos*) Probar que la siguiente identidad es válida $\forall n = 1, 2, 3, \ldots$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

y calcular el limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n^4 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}\,.$$

Solución. Probemos la igualdad por inducción. Para $n = 1$ es verdad que, $1^3 = 1^2$, y también para $n = 2$ es fácil averiguar que $1^3 + 2^3 = 9 = (1 + 2)^2$. Supongamos que sea verdad para $n = k$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + k)^2 \tag{1}$$

y tenemos que probar que es verdad para $n = k + 1$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k + 1)^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + k + k + 1)^2 \tag{2}$$

Analizamos el primer miembro

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3}_{=(1+2+3+\cdots+k)^2} + (k + 1)^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + k)^2 + (k + 1)^3$$

y el segundo (desarrollo cuadrados)

$$\big[\big(1 + 2 + 3 + \cdots + k\big) + (k + 1)\big]^2 = \big(1 + 2 + \cdots + k\big)^2 + (k + 1)^2 + 2\big(1 + 2 + \cdots + k\big)(k + 1)$$
$$= \big(1 + 2 + \cdots + k\big)^2 + (k + 1)^2 + k(k + 1)^2 = \big(1 + 2 + 3 + \cdots + k\big)^2 + (k + 1)^3$$

dado que $1 + 2 + 3 + \cdots + k = k(k + 1)/2$. Por lo tanto los dos miembros son iguales cuando $n = k + 1$, entonces la formula esta probada para todo $n \geq 1$. Antes de calcular el limite observo que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$$

dado que $1 + 2 + 3 + \cdots + k = k(k + 1)/2$. Calculo el limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n^4 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n + 1)^2}{4n^4} \cdot \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} = \frac{1}{4e}$$

dado que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e\,.$$

dado que $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ es una subsucesión de $b_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$, mas precisamente $a_n = b_{k_n}$ es la que corresponde a $k_n = n^2$. Dado que ya sabemos que b_k es convergente y converge a e, también toda subsucesión converge al mismo limite. $\square$

2.: (*5 puntos*) Se considera la sucesión

$$a_0 = 2 \qquad \text{y} \qquad a_n = \frac{a_{n-1} - 1}{5}$$

a: Decir si la sucesión esta acotada superiormente y/o inferiormente y hallar unas cotas en caso afirmativo. Que sabes decir sobre el infimo y/o el supremo ?

b: Hallar la fórmula esplicita de la sucesión a_n y calcular su limite. (Recuerdo la formula

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^k = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r} \qquad \text{para todo} \qquad r > 0\,. \tag{3}$$

Solución. Veamos los dos apartados:

(a). La sucesión a_n es monotona decreciente, es evidente de su expresión:

$$a_n = \frac{1}{5}(a_n - 1) = \frac{a_{n-1}}{5} - \frac{1}{5} \leq a_{n-1}.$$

Por lo tanto esta acotada superiormente por $a_0 = 2$, es decir, $a_n \leq a_0 = 2$ para todo $n \geq 0$. Lo cual muestra que $a_0 = 2$ es un máximo (y obviamente también supremo).

Además, esta acotada inferiormente:

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{5} - \frac{1}{5} < a_{n-1}, \quad \text{que implica la cota inferior} \quad -\frac{1}{4} < a_{n-1}\,.$$

Entonces tenemos que la sucesión es monotona decreciente y acotada:

$$a_n \leq a_{n-1} \qquad \text{y} \qquad -\frac{1}{4} < a_n \leq 2$$

entonces converge a su infimo que resulta ser también su limite. Si llamamos $l = \lim_n a_n = \lim_n a_{n-1}$ y lo substituimos en la expresión de a_n, obtenemos que $l = \frac{1}{5}l - \frac{1}{5}$, lo cual significa $l = -\frac{1}{4}$. Entonces la sucesión $\{a_n\}$ es convergente y converge a su infimo que es $-1/4$:

$$\lim_n a_n = \inf_n \{a_n\} = -\frac{1}{4}$$

Además $-1/4$ no puede ser minimo, porque no hay ningún termino de la sucesión que vale $-1/4$, lo cual estaría en contradición con la estricta monotonia de la sucesión, es decir $a_{n+1} < a_n$.

(b) Vemos si se puede hallar una formula explícita para la sucesión:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{a_{n-1} - 1}{5} = \frac{a_{n-1}}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}\left(\frac{a_{n-2}}{5} - \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5} \\
&= \frac{a_{n-2}}{5^2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5^2}\left(\frac{1}{5}a_{n-3} - \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} = \frac{a_{n-3}}{5^3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} \\
&= \cdots = \frac{a_0}{5^n} - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \cdots + \frac{1}{5^n}\right) = \frac{a_0}{5^n} - \frac{1}{5}\left[1 + \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right] \\
(i) &= \frac{2}{5^n} - \frac{1}{5}\frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{5^n} - \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{4} = \frac{9}{4}\frac{1}{5^n} - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

en (i) he puesto $a_0 = 2$ y he usado la formula (3) con $r = 1/5$. Ahora el calculo del limite es fácil y confirma lo que hemos probado en el apartado (a):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{4}\frac{1}{5^n} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}. \quad \square$$